МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНТЕГРАЛОВ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ ФУНКЦИЙ

О.Н. Литвин, О.П. Нечуйвитер

Украинская инженерно-педагогическая академия (г. Харьков)

Аннотация. При решении задач трехмерной компьютерной томографии, цифровой обработки сигналов и многих других необходимо рассматривать математические модели, где в качестве данных используются не только значения функции в узловых точках, но и следы функции на системе линий или плоскостей. В статье рассматривается и исследуется кубатурная формула вычисления осциллирующего интеграла функции трех переменных с использованием операторов сплайн-интерфлетации. Информация о функции задана её следами на взаимно-перпендикулярных плоскостях. На классе Гельдера получена оценка погрешности кубатурной формулы. Доказано, что эту оценку также можно получить через оценки погрешностей соответствующих квадратурных формул.
Ключевые слова: кубатурная формула, осциллирующие интегралы, класс Гельдера, сплайн-интерфлетация.

Введение. При изучении известных математических моделей и построении новых все чаще в качестве данных используются следы функции на системе линий или плоскостей. Такие модели возникают, например, при решении задач трехмерной компьютерной томографии, цифровой обработки сигналов. Поэтому построение кубатурных формул с использованием таких информационных операторов на данный момент является актуальной задачей, которую позволяет решать аппарат интерлинации [2 с. 146-249] и интерфлетации функций [2 с. 383-417]. Результаты применения теории интерлинации и интерфлетации к приближенному вычислению многомерных осциллирующих интегралов представлены, например, в [6, p. 90-96; 7, p. 45-56]. В данной работе для решения этой же задачи построена кубатурная формула с использованием операторов сплайн-интерфлетации. В качестве данных заданы следы неосциллирующего множителя подинтегральной функции на системе взаимноперпендикулярных плоскостей. Получена оценка погрешности кубатурной формулы на классе Гельдера. Заметим, что оценки самих многомерных осциллирующих интегралов исследованы в [1, c. 211]. Задача приближенного вычисления многомерных интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием асимптотических методов, методов Файлона, Левина рассматривалась в работах [4, p. 7-35; 5, p. 11-17]. В этих методах использовалась информация о следах неосциллирующего множителя внутри и на границе n - мерного куба, но на других классах функций.

1. Кубатурная формула приближенного вычисления интеграла.

Пусть $C^3_{\alpha,L,\tilde{L}}$, $0<\alpha\le 1$ – класс действительных функций трех переменных, определенных на $G=[0,1]^3$ и

$$\left|f(x_1,y,z)-f(x_2,y,z)\right|\le L|x_1-x_2|^{\alpha},$$
$$\left|f(x,y_1,z)-f(x,y_2,z)\right|\le L|y_1-y_2|^{\alpha},$$
$$\left|f(x,y,z_1)-f(x,y,z_2)\right|\le L|z_1-z_2|^{\alpha},$$

а также

$$\big|f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_1,z_1)-f(x_1,y_2,z_1)-f(x_1,y_1,z_2)+f(x_2,y_2,z_1)+f(x_2,y_1,z_2)+$$
$$+f(x_1,y_2,z_2)-f(x_2,y_2,z_2)\big|\le \tilde{L}|x_1-x_2|^{\alpha}|y_1-y_2|^{\alpha}|z_1-z_2|^{\alpha}. \qquad (1)$$

Определение. Под следом функции $f(x,y,z)$ на плоскостях $\{(x,y,z):\ x=x_k,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$ понимаем $f(x_k,y,z),\ \ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$.

Следы функции на других плоскостях определяются аналогично.

Введем обозначения:

$$h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\le x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1,\end{cases}\qquad h_{1\ell}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1}\le x<x_\ell,\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1},\\ \dfrac{x-x_{k-1}}{\Delta}, & x_{k-1}<x<x_k,\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1},\end{cases}\qquad x_k=k\Delta,\ \Delta=\frac{1}{\ell}\ k=\overline{1,\ell-1}.$$

Функции $h_{20}(y),\ h_{2j}(y),\ h_{2\ell}(y),\ h_{30}(z),\ h_{3s}(z),\ h_{3\ell}(z)$, $j,s=\overline{1,\ell-1}$, где $y_j=j\Delta,\ z_s=s\Delta,\ \ \Delta=\dfrac{1}{\ell}$, определяются аналогично.

Пусть $O_1f(x,y,z)=\sum\limits_{k=0}^{\ell}f(x_k,y,z)h_{1k}(x)$, $O_2f(x,y,z)=\sum\limits_{j=0}^{\ell}f(x,y_j,z)h_{2j}(y)$, $O_3f(x,y,z)=\sum\limits_{s=0}^{\ell}f(x,y,z_s)h_{3s}(z)$, $k,j,s\in\overline{0,\ell}$. Тогда оператор сплайн-интерфлетации $Of(x,y,z)$ представляется через операторы $O_\mu f(x,y,z),\ \ \mu=1,2,3$ следующим образом:

$$Of(x,y,z) = O_1 f(x,y,z) + O_2 f(x,y,z) + O_3 f(x,y,z) -$$
$$-O_1 O_2 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z).$$

Для вычисления интеграла

$$I_1^3(m,n,p) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dx dy dz,$$

предлагается формула:

$$\Phi_1^3(m,n,p) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Of(x,y,z) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dx dy dz.$$

2. Способы получения оценки погрешности приближенного вычисления интеграла. В [7, p. 45- 56] показано, что оценка погрешности кубатурных формул выражается через соответствующие погрешности квадратурных формул.

Пусть

$$\tilde{R}_\mu(f; y,z) = \int_0^1 (f(x,y,z) - O_\mu f(x,y,z)) \sin 2\pi mx dx, \quad \mu = 1,2,3.$$

Лемма 1. [7, p. 47] Для остатка

$$R(f) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (f(x,y,z) - Of(x,y,z)) \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy \sin 2\pi pz dz$$

справедливо следующее равенство $R(f) = \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 \tilde{R}_3 f(x,y,z)$.

Далее используем утверждение о функции одной переменной.

Лемма 2. Пусть $g(x)$, определена на $[0,1]$ и $\forall$ $x_1, x_2 \in [0,1]$ выполняется $\left| g(x_1) - g(x_2) \right| \le L |x_1 - x_2|^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$. Тогда для квадратурной формулы справедливо неравенство:

$$\left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - S_k g(x)) \sin 2\pi mx dx \right| \le \frac{2L\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

где $S_k g(x) = g(x_k) \dfrac{x - x_{k+1}}{-\Delta} - g(x_{k+1}) \dfrac{x - x_k}{\Delta}$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $x_k = k\Delta$, $\Delta = \dfrac{1}{\ell}$.

Доказательство.

$$\left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(g(x)-S_k g(x))\sin 2\pi mx dx\right| \le \sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|g(x)-S_k g(x)\right|dx =$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|g(x)\left(\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta}+\frac{x-x_k}{\Delta}\right)-g(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta}-g(x_{k+1})\frac{x-x_k}{\Delta}\right|dx =$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|\left(g(x)-g(x_k)\right)\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta}+\left(g(x)-g(x_{k+1})\right)\frac{x-x_k}{\Delta}\right|dx \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|g(x)-g(x_k)\right|\frac{\left|x-x_{k+1}\right|}{\Delta}dx+\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|g(x)-g(x_{k+1})\right|\frac{\left|x-x_k\right|}{\Delta}dx \le$$

$$\le L\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|x-x_k\right|^{\alpha}\frac{\left|x-x_{k+1}\right|}{\Delta}dx+L\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|x-x_{k+1}\right|^{\alpha}\frac{\left|x-x_k\right|}{\Delta}dx =$$

$$=2L\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}=\frac{2L\Delta^{\alpha}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Лемма доказана.

4. Оценка погрешности кубатурной формулы.

Теорема. Для кубатурной формулы $\Phi_1^3(m,n,p)$ вычисления $I_1^3(m,n,p)$ справедлива следующая оценка погрешности $\left|R(f)\right| \le \dfrac{8\tilde{L}}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)^3\,\ell^{3\alpha}}$.

Доказательство. Доказательство теоремы осуществляется на основании лемм 1, 2:

$$\left|R(f)\right|=\left|\tilde{R}_1\tilde{R}_2\tilde{R}_3(f;x,y,z)\right| \le \frac{8\tilde{L}}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)^3}\Delta^{3\alpha}=\frac{8\tilde{L}}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)^3\,\ell^{3\alpha}},$$

а так же непосредственно.

Ввиду громоздкости выкладок, изложим основные моменты:

$$\left|R(f)\right|=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1(f(x,y,z)-Of(x,y,z))\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|dxdydz =$$

$$\le \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\left|f(x,y,z)-f(x_k,y,z)\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta}-f(x_{k+1},y,z)\frac{x-x_k}{\Delta}-\right.$$

$$-f(x,y_j,z)\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta}-f(x,y_{j+1},z)\frac{y-y_j}{\Delta}-f(x,y,z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta}-f(x,y,z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}+$$

$$+\left(f(x_k, y_j, z)\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta} - f(x_k, y_{j+1}, z)\frac{y-y_j}{\Delta}\right)\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta} +$$

$$+\left(f(x_{k+1}, y_j, z)\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta} - f(x_{k+1}, y_{j+1}, z)\frac{y-y_j}{\Delta}\right)\frac{x-x_k}{\Delta} +$$

$$+\left(f(x_k, y, z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + f(x_k, y, z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}\right)\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta} +$$

$$+\left(f(x_{k+1}, y, z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + f(x_{k+1}, y, z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}\right)\frac{x-x_k}{\Delta} +$$

$$+\left(f(x, y_j, z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + f(x, y_j, z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}\right)\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta} +$$

$$+\left(f(x, y_j, z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + f(x, y_j, z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}\right)\frac{y-y_j}{\Delta} -$$

$$-\left(f(x_k, y_j, z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + f(x_k, y_j, z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}\right)\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta}\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta} -$$

$$-\left(f(x_k, y_{j+1}, z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + f(x_k, y_{j+1}, z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}\right)\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta}\frac{y-y_j}{\Delta} -$$

$$-\left(f(x_{k+1}, y_j, z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + f(x_{k+1}, y_j, z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}\right)\frac{x-x_k}{\Delta}\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta} -$$

$$-\left(f(x_{k+1}, y_{j+1}, z_s)\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + f(x_{k+1}, y_{j+1}, z_{s+1})\frac{z-z_s}{\Delta}\right)\frac{x-x_k}{\Delta}\frac{y-y_j}{\Delta}\Bigg| dxdydz .$$

Представив на $\Pi_{kjs} = [x_k, x_{k+1}]\times[y_j, y_{j+1}]\times[z_s, z_{s+1}]$ функции следующим образом:

$$f(x,y,z) = f(x,y,z)\left(\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta} + \frac{x-x_k}{\Delta}\right)\left(\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta} + \frac{y-y_j}{\Delta}\right)\left(\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + \frac{z-z_s}{\Delta}\right),$$

$$f(x_\mu, y, z) = f(x_\mu, y, z)\left(\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta} + \frac{y-y_j}{\Delta}\right)\left(\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + \frac{z-z_s}{\Delta}\right), \quad \mu = k, k+1,$$

$$f(x_\mu, y_\nu, z) = f(x_\mu, y_\nu, z)\left(\frac{z-z_{s+1}}{-\Delta} + \frac{z-z_s}{\Delta}\right), \quad \mu = k, k+1, \quad \nu = j, j+1,$$

$$f(x_\mu, y, z_\rho) = f(x_\mu, y, z_\rho)\left(\frac{y-y_{j+1}}{-\Delta} + \frac{y-y_j}{\Delta}\right), \quad \mu = k, k+1, \quad \rho = s, s+1,$$

$$f(x, y_\nu, z_\rho) = f(x, y_\nu, z_\rho)\left(\frac{x-x_{k+1}}{-\Delta} + \frac{x-x_k}{\Delta}\right), \quad \nu = j, j+1, \quad \rho = s, s+1,$$

и воспользовавшись дополнительным свойством (1) функции на классе, получим, что

$$|R(f)| \le \frac{8\tilde{L}}{\Delta^3}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|x-x_k||x-x_{k+1}|dx\int_{y_j}^{y_{j+1}}|y-y_j||y-y_{j+1}|dy\int_{z_s}^{z_{s+1}}|z-z_s||z-z_{s+1}|dz =$$

$$=\frac{8\tilde{L}}{\Delta^3}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\frac{\Delta^{3(\alpha+1)}}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)^3}=\frac{8\tilde{L}}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)^3}\ell^3\Delta^{3(\alpha+1)}=\frac{8\tilde{L}}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)^3}\Delta^{3\alpha}.$$

Теорема доказана.

5. Численный эксперимент. В [3, p.400] показано, что для функции $g(u)=\arccos u$ выполняется следующее неравенство:

$$\left|\arccos u_1-\arccos u_2\right|\le\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left|u_1-u_2\right|^{1/2},\quad \forall u_1,u_2\in[-1,1].$$

Рассмотрим функцию $f(x,y,z)\in C^3_{2,L,\tilde{L}}$:

$$f(x,y,z)=\frac{-1}{2}\left(\arccos^2\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)-\arccos^2 x-\arccos^2 y\right)\arccos z.$$

Функцию $f\left(x,y,z\right)$ так же можно представить в виде:

$$f(x,y,z)=\arccos x\cdot\arccos y\cdot\arccos z.$$

Пусть $g(u)=\arccos u,\quad u=x,y,z$, а

$$\tilde{R}_i(g,u,s)=\left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}(g(u)-S_k g(u))\sin 2\pi s u\,du\right|,\quad i=1,2,3,\quad s=m,n,p.$$

Обозначим через $\varepsilon_1=\prod_{i=1}^{3}\tilde{R}_i(g,u,s),\quad u=x,y,z,\quad s=m,n,p$, а через $\varepsilon=\left|R(f)\right|=\left|I_1^3(3,4,5)-\Phi_1^3(3,4,5)\right|$. Покажем, что $\varepsilon=\varepsilon_1$.

Точное значение интеграла $I_1^3(3,4,5)=0.000181219970879$.

Таблица 1.

Погрешности $\tilde{R}_i(g,u,s),\quad i=1,2,3,\quad u=x,y,z,\quad s=m,n,p$.

ℓ	$\tilde{R}_1(g,x,3)$	$\tilde{R}_2(g,y,4)$	$\tilde{R}_3(g,z,5)$
4	0.0150335906054	0.006997971781591	0.00347231291402
9	0.005583986050581	0.005908334316872	0.005709895326273
16	0.00180160006497	0.002096660207992	0.002308844693237

Таблица 2.

Погрешности ε и ε_1.

ℓ	ε	ε_1
4	$\mathbf{3.653}\cdot10^{-7}$	$\mathbf{3.653}\cdot10^{-7}$
9	$1.884\cdot10^{-7}$	$1.8838\cdot10^{-7}$
16	$8.75\cdot10^{-9}$	$8.72\cdot10^{-9}$

Численный эксперимент подтверждает теоретический результат.

Заключение. В статье рассматривается и исследуется кубатурная формула приближенного вычисления интеграла от осциллирующей функции трех переменных. Кубатурная формула строится на использовании операторов интерфлетации. Информация о неосциллирующем множителе подинтегральной функции задана на системе взаимно-перпендикулярных плоскостей. На классе Гельдера получены оценки приближенного вычисления интеграла двумя способами. Численный эксперимент подтвердил теоретический результат: оценка погрешности предлагаемой кубатурной формулы выражается через оценки погрешностей соответствующих квадратурных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чахкиев М.А*. Оценки осциллирующих интегралов с выпуклой фазой // Изв. РАН. – Сер. Матем. – 2006. Т. 70. – №1. – С. 183-220.
2. *Литвин О.М*. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків.: Основа, 2002. – 544 с.
3. *Gal S.G., Szabados J*. On the preservation of global smoothness by some interpolation operators // Studio, Scientiarum Mathematicarum Hungarica 35 (1999), 391'1, 14. – P. 397-414.
4. *Iserles A., Norsett S. P*. From high oscillation to rapid approximation III: Multivariate expansions, Technical Report NA2007/01, DAMPT, - University of Cambridge, 2007. – p. 37.
5. *Iserles A., Norsett S. P.* From high oscillation to rapid approximation IV:Accelerating convergence, Technical Report NA2007/07, DAMPT, - University of Cambridge, 2007. – p. 24.
6. *Lytvyn Oleg N., Nechuyviter Olesya P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation: proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology, ASIT 2010, 15-18.06.2010. – Novosibirsk, 2010. – P. 90 – 96.
7. *Lytvyn, O.N., Nechuyviter O.P*. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation // Journal of Automation and Information Sciences. – 2012. – Vol. 44, – № 3. – P. 45–56.

THE CALCULATION OF TRIPLE INTEGRALS OF HIGHLY OSCILLATORY FUNCTIONS WITH USING INTERFLATATION

O. Lytvyn, O.Nechuiviter

Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkiv

Abstract. Today a new data, such as traces of the function on a system of lines or planes, are considered in mathematical models in solving of problems of three-dimensional computer tomography, digital signal processing and in many others. In this article cubature formula of the calculation of high oscillating integrals is presented by using operators of spline-interflatation in the case when information about function is set of values on the perpendicular flats. The estimation of error of approaching of the cubature formula is getting on Gelder's class of functions. It is proved that this evaluation can also be obtained through the error estimates corresponding quadrature formulas.
Keywords: cubature formula, High oscillating integrals, Gelder's class, spline-interflatation.