УДК 519.6

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ РАЗРЫВНЫМИ ИНТЕРЛИНАЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ НА ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

О.Н. Литвин, Ю.И. Першина

Украинская инженерно-педагогическая академия (г.Харьков)
61002, г. Харьков, ул. Университетская, 16, Украина

Аннотация. Предложен метод построения разрывных интерлинационных полиномиальных сплайнов, которые приближают разрывные функции двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области. Построенные сплайны, как частный случай, включают в себя разрывные и непрерывные сплайны. Сформулирована и доказана теорема об общем виде погрешности приближения в интегральной форме.
Ключевые слова: разрывная функция, разрывный оператор интерлинации, треугольные элементы.

Введение. Задача приближения непрерывных функций непрерывными сплайнами одной и нескольких переменных с достаточной полнотой описана во многих работах.

На практике использование кусочно-аналитических приближений, заданных разными формулами (полиномами соответствующей степени) в точках каждого элемента разбиения области приближения приводит иногда к нахождению большого количества неизвестных параметров. Это привело к появлению неконформных элементов в методе конечных элементов [7]. Аналогичная задача исследовалась в работах Попова Б.А. [6], где рассматривалось приближение непрерывных и непрерывно-дифференцированных функций с помощью разрывных сплайнов в чебышевской норме (равномерное приближение). В работе [5] исследуется разрывный метод Галеркина. В отличие от классического метода Галеркина, разрывной метод аппроксимирует решение функциями, разрывными на границах ячеек расчетной сетки.

Таким образом, в указанных работах исследовалось приближение непрерывных функций с помощью непрерывных и разрывных сплайнов. Но общей теории таких приближений не существует. Также не существует общей теории приближения разрывных функций разрывными сплайнами. В данной работе авторы предлагают такую общую теорию построения разрывных сплайнов, множество которых, как частный случай, включает множество непрерывных сплайнов, которые могут иметь разрывы первого рода в заданных точках или на заданном множестве линий – границ элементов.

В статье [1] авторами были построены разрывные линейные интерполяционные сплайны для приближения функций одной переменной, имеющей разрывы первого рода. А также был разработан алгоритм нахождения разрывов функции одной переменной и алгоритм оптимального нахождения узлов интерполяционного линейного сплайна для приближения разрывной функции одной переменной. В [2] был предложен метод приближения разрывных функций двух переменных с ректангулированной областью определения разрывными интерполяционными билинейными сплайнами.

Разработанные методы в дальнейшем будут использоваться для решения плоской задачи радоновской компьютерной томографии. Для этого целесообразнее использовать операторы интерлинации функций [3], поскольку эти операторы восстанавливают (возможно, приближенно) по известным их следам на заданной системе линий. То есть, они дают возможность строить операторы, интегралы от которых по указанным линиям будут равняться интегралам от самой восстанавливаемой функции. Отсюда следует, что интерлинация является математическим аппаратом, естественно связанным с задачей восстановления характеристик объектов по известным их проекциям. В работе [4] были построены разрывные интерлинационные сплайны для приближения функций двух переменных, область определения которых разбивается на прямоугольные треугольники.

Данная работа является обощением работы [4]. В ней строится и исследуется интерлинационный разрывный сплайн для приближения разрывных функций с областью определения, которая разбивается на произвольные треугольники.

Постановка задачи. Пусть задана разрывная функция двух переменных $f(x,y)$ в области D. Будем считать, что область D разбивается на произвольные треугольники. Треугольники не вкладываются друг в друга, а стороны треугольников не пересекаются. Функция $f(x,y)$ имеет разрывы первого рода на границах между этими треугольными элементами (не обязательно между всеми). Целью работы является построение и исследование операторов разрывной кусочно-полиномиальной интерлинации, которые в каждом треугольнике являются операторами полиномиальной интерлинации функции $f(x,y)$.

Метод построения разрывной.

Рассмотрим треугольный элемент $\mathrm{T}_i,\ i=\overline{1,n}$, стороны которого задаются уравнениями:

$$\Gamma_k^i : \omega_k^i(x,y) = x\cdot\omega_{k1}^i + y\cdot\omega_{k2}^i - \gamma_k^i \qquad ,\ k=\overline{1,3},\ i=\overline{1,n},\ \left(\omega_{k1}^i\right)^2+\left(\omega_{k2}^i\right)^2=1,$$

$$\Delta_{123}^i = \begin{vmatrix} \omega_{12}^i & \omega_{11}^i & -\gamma_1^i \\ \omega_{22}^i & \omega_{21}^i & -\gamma_2^i \\ \omega_{32}^i & \omega_{31}^i & -\gamma_3^i \end{vmatrix} \neq 0,\ \Delta_{k\ell}^i = \begin{vmatrix} \omega_{k1}^i & \omega_{k2}^i \\ \omega_{\ell1}^i & \omega_{\ell2}^i \end{vmatrix} \neq 0,\ k\neq\ell,\ \tau_k^i = (\omega_{k2}^i, -\omega_{k1}^i),\ k=\overline{1,3}$$

Пусть $A_{kl}^i = (x_{kl}^i, y_{kl}^i)$, – решения систем уравнений:

$$\omega_k^i(x,y)=0,\ \omega_\ell^i(x,y)=0,\ k\neq\ell,\ k,\ell=\overline{1,3},$$

то есть это - вершины заданного треугольника.

Считаем заданными следы функции $f(x,y)$ на прямых Γ_k^i (под и над прямой соответственно):

$$\varphi m_k^i(x,y) = f\left(x, \frac{\gamma_k - x\omega_{k1}}{\omega_{k2}} - 0\right),\quad \varphi p_k^i(x,y) = f\left(x, \frac{\gamma_k - x\omega_{k1}}{\omega_{k2}} + 0\right)$$

или

$$\psi m_k^i(x,y) = f\left(\frac{\gamma_k - y\omega_{k2}}{\omega_{k1}} - 0, y\right), \quad \psi p_k^i(x,y) = f\left(\frac{\gamma_k - y\omega_{k2}}{\omega_{k1}} + 0, y\right).$$

Лемма. Между координатами $(x_{kl}^i, y_{kl}^i) = A_{kl}^i$ точки пересечения прямых Γ_k^i, Γ_l^i, векторами τ_k^i, τ_l^i и функциями $\omega_k^i(x,y), \omega_l^i(x,y)$ выполняется соотношение

$$A_{kl}^i - \frac{\tau_l^i}{\Delta_{kl}^i}\omega_k^i(x,y) \equiv \overline{x} + \frac{\tau_k^i}{\Delta_{lk}^i}\omega_l^i(x,y),\ \overline{x} = (x,y)\cdot$$

Доказательство. Координаты точки $A_{kl}^i \neq \varnothing$ удовлетворяют систему

$$\begin{cases} \omega_k^i(A_{kl}^i) = 0, \\ \omega_l^i(A_{kl}^i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{k1}^i x_{kl}^i + \omega_{k2}^i y_{kl}^i = \gamma_k^i \\ \omega_{l1}^i x_{kl}^i + \omega_{l2}^i y_{kl}^i = \gamma_l^i \end{cases}.$$

То есть

$$A_{kl}^i = \begin{pmatrix} x_{kl}^i \\ y_{kl}^i \end{pmatrix} = \Omega_{kl}^{-1}\begin{pmatrix} \gamma_{ki}^i \\ \gamma_l^i \end{pmatrix}, \quad \Omega_{kl}^i = \begin{pmatrix} \omega_{k1}^i & \omega_{k2}^i \\ \omega_{l1}^i & \omega_{l2}^i \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{kl}^{-1} = \frac{1}{\Delta_{kl}^i}\begin{pmatrix} \omega_{l2}^i & -\omega_{k2}^i \\ -\omega_{l1}^i & \omega_{k1}^i \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{kl}^i}\left(\left(\tau_l^i\right)^T \quad -\left(\tau_l^i\right)^T\right)\cdot$$

Отсюда следует, что

$$\left(A_{kl}^i\right)^T + \frac{\left(\tau_l^i\right)^T}{\Delta_{kl}^i}\omega_k^i(\overline{x}) + \frac{\left(\tau_k^i\right)^T}{\Delta_{kl}^i}\omega_l^i(\overline{x}) = \left(A_{kl}^i\right)^T + \left(\Omega_{kl}^i\right)^{-1}\begin{pmatrix} \omega_k^i(\overline{x}) \\ \omega_l^i(\overline{x}) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(A_{kl}^i\right)^T - \left(\Omega_{kl}^i\right)^{-1}\begin{pmatrix} \gamma_k^i \\ \gamma_l^i \end{pmatrix} + \left(\Omega_{kl}^i\right)^{-1}\Omega_{kl}^i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\overline{x^i}\right)^T.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $f(x,y) \in C^2(\mathrm{T}_i),\ i = \overline{1,n}$. Если следы функции $f(x,y)$ удовлетворяют в точках A_{kl}^i условиям С.М. Никольского, которые когут быть, например, записаны так:

$$\begin{aligned} &\varphi p_3^i(x_{13}^i, y) = \varphi m_1^i(x_{13}^i, y), \\ &\varphi m_1^i(x_{12}^i, y) = \psi m_2^i(x, y_{12}^i), \\ &\psi m_2^i(x, y_{32}^i) = \varphi p_3^i(x, y_{32}^i) \end{aligned}$$

Тогда оператор

$$O^i f(x,y)= \tag{1}$$

$$=\frac{\omega_1^i(x,y)}{\omega_1^i(A_{23}^i)}\left(\psi m_2^i\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}\omega_3^i(x,y)\right)+\varphi p_3^i\left(A_{23}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}\omega_2^i(x,y)\right)-\varphi p_3^i(A_{23}^i)\right)+$$
$$+\frac{\omega_2^i(x,y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)}\left(\varphi m_1^i\left(A_{13}^i-\frac{\tau_1^i}{\Delta_{13}^i}\omega_3^i(x,y)\right)+\varphi p_3^i\left(A_{13}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{31}^i}\omega_1^i(x,y)\right)-\varphi m_1^i(A_{13}^i)\right)+$$
$$+\frac{\omega_3^i(x,y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)}\left(\varphi m_1^i\left(A_{12}^i-\frac{\tau_1^i}{\Delta_{12}^i}\omega_2^i(x,y)\right)+\psi m_2^i\left(A_{12}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{21}^i}\omega_1^i(x,y)\right)-\psi m_2^i(A_{12}^i)\right)$$

является разрывным интерлинационным сплайном в T_i и имеет свойства

$$\begin{aligned}
&O^i f(x,y)\Big|_{\Gamma_1:\omega_1^i(x,y-0)=0}=\varphi m_1^i(x)\Big|_{\Gamma_1:\omega_1^i(x,y-0)=0};\\
&O^i f(x,y)\Big|_{\Gamma_2:\omega_2^i(x,y-0)}=\psi m_2^i(x)\Big|_{\Gamma_2:\omega_2^i(x,y-0)=0};\\
&O^i f(x,y)\Big|_{\Gamma_3:\omega_3^i(x,y+0)=0}=\varphi p_3^i(x)\Big|_{\Gamma_3:\omega_3^i(x,y+0)=0}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Вычислим след оператора интерлинации на линии $\Gamma_1^i:\omega_1^i(x-0,y)=0$.

$$O^i f(x,y)\Big|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}=$$
$$=\frac{\omega_2^i(x,y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)}\Bigg|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}\cdot\left(\varphi m_1^i\left(A_{13}^i-\frac{\tau_1^i}{\Delta_{13}^i}\omega_3^i(x,y)\right)+\varphi p_3^i\left(A_{13}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{31}^i}\omega_1^i(x,y)\right)-\right.$$
$$\left.-\varphi m_1^i(A_{13}^i)\right)\Big|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}=$$
$$+\frac{\omega_3^i(x,y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)}\Bigg|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}\cdot\left(\varphi m_1^i\left(A_{12}^i-\frac{\tau_1^i}{\Delta_{12}^i}\omega_2^i(x,y)\right)+\psi m_2^i\left(A_{12}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{21}^i}\omega_1^i(x,y)\right)-\right.$$
$$\left.-\psi m_2^i(A_{12}^i)\right)\Big|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}.$$

Далее, воспользовавшись результатами леммы, получим:

$$O^i f(x,y)\Big|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}=$$
$$=\frac{\omega_2^i(x,y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)}\Bigg|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}\left(\varphi m_1^i(x,y)+\varphi p_3^i\left(A_{13}^i\right)-\varphi m_1^i(A_{13}^i)\right)\Big|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}+$$

$$+\left.\frac{\omega_3^i(x,y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)}\right|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}\left.\left(\varphi m_1^i(x,y)+\psi m_2^i\left(A_{12}^i\right)-\psi m_2^i(A_{12}^i)\right)\right|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}=$$

$$=\varphi m_1^i(x,y)\Big|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}\cdot\left(\left.\frac{\omega_2^i(x,y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)}\right|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}+\left.\frac{\omega_3^i(x,y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)}\right|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}\right)=\varphi m_1^i(x,y)\Big|_{\omega_1^i(x,y-0)=0}$$

Таким образом, первое свойство в формуле (1) доказано. Остальные свойства доказываются аналогично.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если $f(x,y)\in C^{(2,2)}(\mathrm{T}^i),\ i=\overline{1,n}$, то для остатка $R^i f(x,y)=(I-O^i)f(x,y)$ выполняется равенство:

$$R^i f(x,y)=\frac{\omega_1^i(x,y)}{\omega_1^i(A_{23}^i)}\int_0^{\omega_2^i(x,y)}\int_0^{\omega_3^i(x,y)} f^{(1,1)}\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}t_3-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}t_2\right)dt_2dt_3+$$

$$+\frac{\omega_2^i(x,y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)}\int_0^{\omega_1^i(x,y)}\int_0^{\omega_3^i(x,y)} f^{(1,1)}\left(A_{13}^i-\frac{\tau_1^i}{\Delta_{13}^i}t_3-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{31}^i}t_1\right)dt_1dt_3+$$

$$+\frac{\omega_3^i(x,y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)}\int_0^{\omega_1^i(x,y)}\int_0^{\omega_2^i(x,y)} f^{(1,1)}\left(A_{12}^i-\frac{\tau_1^i}{\Delta_{12}^i}t_2-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{21}^i}t_1\right)dt_1dt_2,\quad (x,y)\in\mathrm{T}^i\cdot \tag{3}$$

Доказательство. Вычислим первый из трех интегралов:

$$\int_0^{\omega_2^i(x,y)}\int_0^{\omega_3^i(x,y)} f^{(1,1)}\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}t_3-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}t_2\right)dt_2dt_3=$$

$$=\int_0^{\omega_2^i(x,y)}\left(f^{(0,1)}\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}\omega_3(x,y)-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}t_2\right)-f^{(0,1)}\left(A_{23}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}t_2\right)\right)dt_2=$$

$$=f\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}\omega_3(x,y)-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}\omega_2(x,y)\right)-f\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}\omega_3(x,y)\right)-$$

$$-f\left(A_{23}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}\omega_2(x,y)\right)+f\left(A_{23}^i\right)=$$

$$=f(x,y)-\left(f\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}\omega_3(x,y)\right)+f\left(A_{23}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}\omega_2(x,y)\right)-f\left(A_{23}^i\right)\right)=$$

$$=f(x,y)-\left(\psi m_2^i\left(A_{23}^i-\frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i}\omega_3^i(x,y)\right)+\varphi p_3^i\left(A_{23}^i-\frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i}\omega_2^i(x,y)\right)-\varphi p_3^i(A_{23}^i)\right);$$

Аналогично вычисляются остальные два интеграла. После подстановки вычисленных интегралов в формулу (3), учитывая, что $R^i f(x,y) = f(x,y) - O^i f(x,y)$ получим

$$f(x,y) - O^i f(x,y) = f(x,y) - O^i f(x,y).$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Если односторонние следы на одной линии совпадают, то получаем непрерывный интерлинационный сплайн.

Пример. Пусть областью определения разрывной функции $f(x,y)$ является треугольник Т (рис. 1), стороны которого задаются уравнениями $\omega 1(x,y)=0$, $\omega 2(x,y)=0$, $\omega 3(x,y)=0$:

$$\omega 1(x,y) = \frac{x}{\sqrt{50}} + 7\frac{y}{\sqrt{50}} - \frac{3}{\sqrt{50}},$$

$$\omega 2(x,y) = -4\frac{x}{\sqrt{41}} + 5\frac{y}{\sqrt{41}} - \frac{1.2}{\sqrt{41}},$$

$$\omega 3(x,y) = 5\frac{x}{\sqrt{29}} + 2\frac{y}{\sqrt{29}} - \frac{5.1}{\sqrt{29}}.$$

Если решить поопарные системы выше приведенных уравнений, то получим точки пересечения сторон треугольника : $A_{12}(0,2;0,4)$, $A_{23}(0,7;0,8)$, $A_{13}(0,9;0,3)$. А функция $f(x,y)$ задается так:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x,y) \in \mathrm{T} \\ 0, & (x,y) \notin \mathrm{T} \end{cases}$$

То есть функция имеет разрывы на линиях заданного треугольника и на этих линиях имеет следующие следы (под и над линиями соответственно):

$$\varphi m_1(x,y) = f(x,y)\big|_{\omega 1(x,y-0)=0} = 0,$$

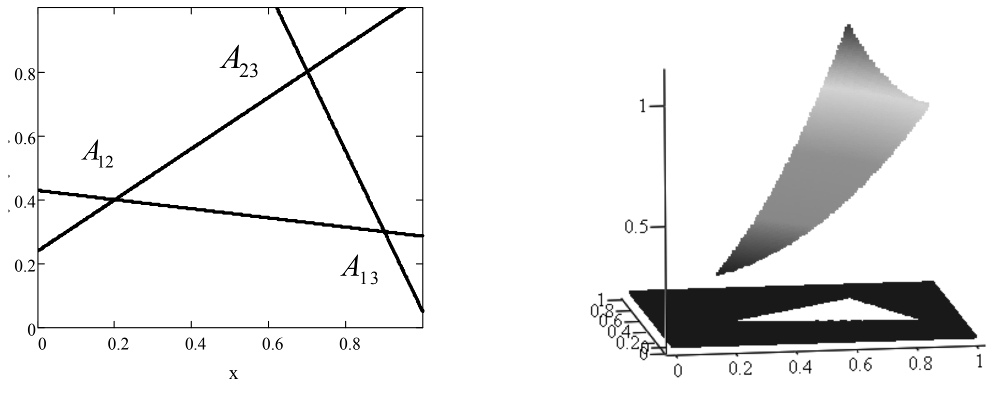
$$\varphi p_1(x,y) = f(x,y)\big|_{\omega 1(x,y+0)=0} = 1.02x^2 - 0.122x + 0.184,$$

$$\psi m_2(x,y) = f(x,y)\big|_{\omega 2(x,y-0)=0} = 0,$$

$$\varphi p_2(x,y) = f(x,y)\big|_{\omega 2(x,y+0)=0} = 2.56y^2 - 0.75y + 0.09,$$

$$\varphi m_3(x,y) = f(x,y)\big|_{\omega 3(x,y-0)=0} = 7.25x^2 - 12.75x + 6.5025,$$

$$\varphi p_3(x,y) = f(x,y)\big|_{\omega 3(x,y+0)=0} = 0.$$



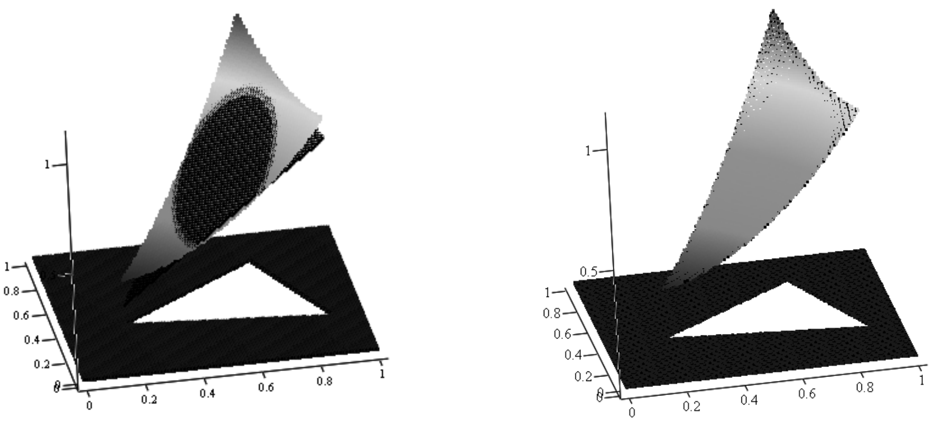
а) б)

Рис. 1. а) область определения функции $f(x,y)$; б) график функции $f(x,y)$.

Проверим выполнение условий Никольского:

$$\varphi p_1(x,y)\big|_{\omega 2(x,y-0)=0} = \psi\, m_2(x,y)\big|_{\omega 1(x-0,y)=0} = 0.2\,,$$
$$\psi\, m_2(x,y)\big|_{\omega 3(x-0,y)=0} = \varphi\, p_3(x,y)\big|_{\omega 2(x,y-0)=0} = 1.13\,,$$
$$\varphi\, p_2(x,y)\big|_{\omega 3(x+0,y)=0} = \varphi m_3(x,y)\big|_{\omega 1(x-0,y)=0} = 0.9\,.$$

Таким образом условия теоремы 1 выполняются, и построенный по формуле (1) разрывный интерлинационный сплайн, представлен на рис. 2б). На рис. 2а) для сравнения представлен разрывный интерполяционный сплайн, приближающий ту же разрывную функцию. Для этого были использованы результаты работы [2].



а) б)

Рис.2. Изображение заданной разрывной функции $f(x,y)$;

а) разрывного интерполяционного сплайна;

б) разрывного интерлинационного сплайна (1).

Как видим из рисунка 2 разрывный интерлинационный сплайн приближает разрывную функцию лучше, чем разрывный интерполяционный сплайн.

Заключение. Таким образом, в данной статье предложен метод построения разрывных полиномиальных сплайн-интерлинантов, которые как частный случай включают в себя разрывные сплайны и непрерывные сплайны для случая, когда область исследуемой функции разбита на произвольные треугольники. Сформулирована и доказана теорема об интерлинационных свойствах построенной разрывной конструкции. Определен интегральный вид остатка приближения разрывной функции построенным сплайн-интерлинантом.

Следующим шагом авторы планируют разработать метод приближения разрывных функций разрывными сплайн-интерлинантами в случае, когда линии разрывов неизвестны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвин *О.М., Першина Ю.І.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип.3. – С. 122 – 131.
2. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) – Компьютерная математика. – Киев, 2011. – №1. –С.96 – 105.
3. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с.
4. Литвин О.М., Першина Ю.І. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев, 2011, №5. – С.34–47.
5. Петровская Н.Б. Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка // Математическое моделирование.–Москва.–2005.–Т.17, №1.– С. 79–92
6. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наукова думка, 1989.– 272с.
7. Сьярле Ф. Метод конечних элементов для эллиптических задач. Перевод с английского Б.И. Квасова. - Изд-во "Мир", Москва. 1980. - 512с.

APPROXIMATION OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS BY DISCONTINUOUS INTERLINATIONAL SPLINES ON TRIANGULATED DOMAINS

O. Lytvyn, Y. Pershina

Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy (Kharkov)

Abstract. Method for the construction of discontinuous interlinational polynomial splines that bring discontinuous functions of two variables with discontinuities of the first kind on the lines of a two-dimensional triangulation. Spline as a special case, include discontinuous and continuous splines. We formulate and prove a theorem on the general form of the approximation error in the integral form.
Keywords: discontinuous function discontinuous operator of interlinational, triangular elements.