ФИЗИКА

УДК 533.72

РЕШЕНИЕ ДИФФУЗИОННОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФУЗИОФОРЕЗА КРУПНОЙ ТВЕРДОЙ НЕЛЕТУЧЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

В.Е. Ефремов, М.К. Кузьмин

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Авторы продолжают построение теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Приводится решение диффузионной задачи, которая разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарной части этой задачи получена окончательная формула для определения стационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы. Для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая формула в пространстве лапласовых изображений. С помощью теорем о предельных значениях из операционного исчисления получена зависимость нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости сферической частицы от строго нестационарного градиента концентрации при больших и малых значениях времени.

Ключевые слова: нестационарный диффузиофорез, крупная сферическая частица, диффузионная задача, градиент концентрации.

1. Введение

В работе [2] была поставлена задача построения теории нестационарного диффузиофоретического движения крупной твердой нелетучей частицы сферической формы с учетом диффузионного скольжения газа вдоль поверхности частицы и решена соответствующая гидродинамическая задача.

В настоящей работе приведем решение диффузионной задачи.

2. Решение диффузионной задачи

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_{12} \Delta_{r\theta} C_1 , \tag{2.1}$$

которому удовлетворяет распределение концентрации первого компонента бинарной газовой смеси, является уравнением диффузии. При этом справедливы равенства

$$C_1(r,\theta,t) = C_1^{(1)}(r,\theta) + C_1^{(2)}(r,\theta,t), \tag{2.2}$$

$$C_1^{(1)}(r,\theta)=C_1(r,\theta,t)_{|t=0},$$

$$C_1^{(2)}(r,\theta,t)_{|t=0}=0, \qquad (2.3)$$

Если функции $C_1^{(1)}(r,\theta)$, $C_1^{(2)}(r,\theta,t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\Delta_{r\theta}C_1^{(1)}=0, \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial t}=D_{12}\Delta_{r\theta}C_1^{(2)} \qquad (2.5)$$

соответственно, то их сумма (2.2) будет решением дифференциального уравнения (2.1).

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид [6]

$$C_1^{(1)}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(\cos\theta)$ – полином Лежандра порядка n; A_n, B_n – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи. Из условия

$$C_1=C_{01}+\left|\left[\nabla C_1(t)\right]_\infty\right|r\cos\theta, \qquad (2.6)$$

при $t = 0$ получаем:

$$C_1^{(1)}=C_{01}+\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty\right|r\cos\theta. \qquad (2.7)$$

С учетом условия (2.7) для концентрации $C_1^{(1)}(r,\theta)$ находим:

$$C_1^{(1)}=C_{01}+\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty\right|r\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta). \qquad (2.8)$$

Для определения величин B_0, B_n (n = 1, 2,…) в разложении (3.4) обратимся к граничному условию

$$\frac{\partial C_1}{\partial r}\Big|_{r=R}=0, \qquad (2.9)$$

из которого при $t = 0$ получаем:

$$\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=R}=0. \qquad (2.10)$$

Учет граничного условия (2.10) с использованием свойства ортогональности полиномов Лежандра [6, 7], то есть равенства:

$$\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta \quad d\theta = \delta_{nm}\,(n, m = 0, \ 1, \ 2,...), \tag{2.11}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, приводит к бесконечному числу линейных уравнений. Эти уравнения, кроме одного, имеющего вид:

$$\frac{2B_1}{R^3} = \left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_{\infty}\right|, \tag{2.12}$$

дают нулевые решения:

$$B_0 = B_n = 0 \quad (n \geq 2). \tag{2.13}$$

Из уравнения (2.12) находим:

$$B_1 = \frac{R^3}{2}\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_{\infty}\right|. \tag{2.14}$$

Подставив найденные значения коэффициентов (2.13), (2.14) в разложение (2.8), получим:

$$C_1^{(1)} = C_{01} + \left[1 + \frac{R^3}{2r^3}\right]\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_{\infty}\right| r\cos\theta .$$

Из последнего соотношения находим:

$$\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial\theta}_{|r=R} = -\frac{3R\sin\theta}{2}\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_{\infty}\right|. \tag{2.15}$$

Используя выражение (2.15), соотношение

$$\left|\vec{u}_1\right| = -\frac{2K_{sl}D_{12}}{3R\sin\theta}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial\theta}_{|r=R}$$

приведем к виду:

$$\left|\vec{u}_1\right| = K_{sl}D_{12}\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_{\infty}\right|. \tag{2.16}$$

Напоминаем, что в последней формуле $\vec{u}_1$ – скорость центра инерции внешней среды относительно покоящейся частицы при $t = 0$.

Согласно равенству

$$\vec{u}_D(t) = -\vec{u}(t)$$

стационарная составляющая диффузиофоретической скорости частицы относительно центра инерции внешней среды $\vec{u}_{1D}$ равна $-\vec{u}_1$. Поэтому из формулы (2.16) получаем

$$\vec{u}_{1D} = -K_{sl} D_{12} \left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty . \tag{2.17}$$

Полученная формула совпадает с известной формулой для скорости стационарного диффузиофореза твердой сферической частицы [7].

Рассмотрим уравнение (2.5). Его решение будем искать в виде произведения

$$C_1^{(2)}(r,\theta,t) = \Phi(\theta)\cdot h(r,t), \tag{2.18}$$

то есть, используем метод разделения переменных [6]. Подставим это произведение в уравнение (2.5), из которого после некоторого преобразования имеем

$$\frac{1}{\Phi \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{h}\left[\frac{r^2}{D_{12}}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial h}{\partial r}\right)\right].$$

Отсюда, введя постоянную разделения λ, получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}\right) + \lambda\Phi = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{r^2}{D_{12}}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial h}{\partial r}\right) + \lambda h = 0. \tag{2.20}$$

Решая уравнение (2.19), находим собственные значения $\lambda = n(n+1)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$, которым соответствуют полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta)$ [6].

Рассмотрим уравнение (2.20), где $\lambda = n(n+1)$. Из начального условия (2.3) в силу представления (2.18) имеем:

$$h(r,t)_{|t=0} = 0 . \tag{2.21}$$

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение с частными производными (2.20), применим к нему интегральное преобразование Лапласа $L\{h(r,t)\} = H(r,p)$. С учетом начального условия (2.21) получим в пространстве изображений соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dH}{dr} - \left[\frac{p}{D_{12}} + \frac{n(n+1)}{r^2}\right]H = 0 . \tag{2.22}$$

Общее решение этого уравнения выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [3, 4]:

$$I_{n+1/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left[e^{z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^{k}}-(-1)^{n}e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^{k}}\right],$$

$$K_{n+1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^{k}}$$

следующим образом:

$$H_{n}=\frac{A_{n}}{\sqrt{r}}I_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right)+\frac{B_{n}}{\sqrt{r}}K_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right),$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи.

Рассмотрим лапласово изображение функции $C_1^{(2)}$. Оно представляется произведением функций:

$$S_1^{(2)}(r,\theta,p)=L\left\{C_1^{(2)}(r,\theta,t)\right\}=\Phi(\theta)\cdot H(r,p).$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения, являющегося изображением уравнения (2.5), выражается линейной комбинацией произведений частных решений уравнений (2.19) и (2.22), то есть

$$S_1^{(2)}(r,\theta,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{A_{n}}{\sqrt{r}}I_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right)+\frac{B_{n}}{\sqrt{r}}K_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right)\right]P_{n}(\cos\theta). \qquad (2.23)$$

Так как из соотношений (2.2), (2.6), (2.7) следует равенство

$$C_1^{(2)}=\left|\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_{\infty}\right|r\cos\theta,$$

где

$$\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_{\infty}=\left[\nabla C_1(t)\right]_{\infty}-\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_{\infty},$$

то в пространстве изображений имеем при $r\to\infty$ соответствующее ему равенство

$$S_1^{(2)}=G_{\infty}(p)r\cos\theta, \qquad (2.24)$$

где

$$G_{\infty}(p)=L\left\{\left|\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_{\infty}\right|\right\}.$$

С учетом условия (2.24) из разложения (2.23) получаем выражение $S_1^{(2)} = S_1^{(2)}(r,\theta,p)$:

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p) r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right) P_n(\cos\theta). \qquad (2.25)$$

Для определения величин B_n (n = 0, 1,2,…) используем изображение надлежащего граничного условия. Из граничного условия (2.9) получаем равенство:

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0.$$

В пространстве изображений ему соответствует следующее равенство:

$$\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0. \qquad (2.26)$$

Учет условия (2.26) для выражения (2.25) с использованием свойства ортогональности полиномов Лежандра (2.11) приводит к бесконечному числу линейных уравнений. Эти уравнения, кроме одного, имеющего вид:

$$\frac{B_1}{R\sqrt{R}}\left[K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}}K'_{3/2}\right] = 2G_\infty(p), \qquad (2.27)$$

дают нулевые решения:

$$B_0 = B_n = 0 \quad (n \geq 2). \qquad (2.28)$$

Заметим, что во избежание громоздкости формул, аргументы модифицированной функции Бесселя $K_{3/2}$ и ее производной, имеющие вид $R\sqrt{p/D_{12}}$, мы опускаем.
Из уравнения (2.27) находим

$$B_1 = \frac{2R\sqrt{R}G_\infty(p)}{K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}}K'_{3/2}}. \qquad (2.29)$$

Таким образом, учитывая (2.28), (2.29), из разложения (2.25) находим

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p) r\cos\theta + \frac{B_1}{\sqrt{r}} K_{3/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right)\cos\theta.$$

Из последнего соотношения находим:

$$\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial\theta}\Big|_{r=R} = -R\sin\theta\cdot F_S(p)\cdot G_\infty(p), \qquad (2.30)$$

где

$$F_S(p) = 1 + \frac{2K_{3/2}}{K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}^{(e)}}K'_{3/2}}. \tag{2.31}$$

Используя выражение (2.30), формулу

$$U_2 = -\frac{K_{sl}D_{12}}{R\sin\theta}F_U(p)\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial\theta}\Big|_{r=R}$$

приведем к виду:

$$U_2 = K_{sl}D_{12}F_U(p)\cdot F_S(p)\cdot G_\infty(p). \tag{2.32}$$

Таким образом, в пространстве изображений получена формула для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы.

3. Анализ полученной в пространстве изображений формулы для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости сферической частицы

Проведем анализ зависимости нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы $\vec{u}_{2D}(t)$ от строго нестационарной части градиента концентрации $\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_\infty$ для малых и больших значений времени. Для этого используем теоремы о предельных значениях из операционного исчисления [1].

С целью упрощения формы записи в дальнейшем часто будем использовать обозначение неотрицательной функции $\left|\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_\infty\right|$ через $g_\infty(t)$.

По выражениям:

$$F_U(p) = \frac{6\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu\cdot p}\right)}{2R^2(\rho_e - \rho_i)p + 9\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu\cdot p}\right)}, \tag{3.1}$$

(2.31) находим соответственно:

$$\lim_{p\to 0} F_U(p) = \frac{2}{3},\ \lim_{p\to 0} F_S(p) = \frac{3}{2}. \tag{3.2}$$

Применив к формуле (2.32) теорему о конечном значении с учетом соотношений (3.2), получаем предельное равенство:

$$\lim_{t\to\infty}\left|\vec{u}_{2D}(t)\right| = K_{sl}D_{12}\lim_{t\to\infty} g_\infty(t), \tag{3.3}$$

которое справедливо при любом соотношении между ρ_e и ρ_i.

В силу равенства (3.3) имеем:

$$\lim_{t\to\infty}\vec{u}_{2D}(t) = -K_{sl}D_{12}\lim_{t\to\infty}\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_\infty . \qquad (3.4)$$

Отметим, что формулы (2.17) и (3.4) описывают одинаковую зависимость стационарных и строго нестационарных величин скорости и градиента концентрации.

Рассматривая пределы при $p \to \infty$, будем различать случаи

$$\rho_e - \rho_i \neq 0, \quad \rho_e - \rho_i = 0 .$$

Функция (3.1) тождественно равна постоянной величине при $\rho_e - \rho_i = 0$:

$$F_U(p)\big|_{\rho_e-\rho_i=0} \equiv \frac{2}{3},$$

а

$$\lim_{p\to\infty}F_U(p) = 0 \ (\rho_e - \rho_i \neq 0).$$

Так как

$$\lim_{p\to\infty}F_S(p) = 1, \qquad (3.5)$$

то, применив к соотношению (2.32) при $\rho_e - \rho_i = 0$ теорему о начальном значении, получим следующее предельное равенство

$$\lim_{t\to 0}\left|\vec{u}_{2D}(t)\right| = \frac{2}{3}K_{sl}D_{12}\lim_{t\to 0}g_\infty(t). \qquad (3.6)$$

Если $\rho_e - \rho_i \neq 0$, то рассматриваем преобразованное выражение правой части соотношения (2.32)

$$U_2 = K_{sl}D_{12}\left[\sqrt{p}F_U(p)\right]\cdot F_S(p)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{p}}G_\infty(p)\right]. \qquad (3.7)$$

Имеем:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\sqrt{p}\cdot F_U(p)\right] = \frac{3\rho_e\sqrt{\nu}}{R(\rho_e - \rho_i)} \neq 0 . \qquad (3.8)$$

Находим оригинал:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}G_\infty(p)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * g_\infty(t). \qquad (3.9)$$

Применив к соотношению (3.7) теорему о начальном значении с учетом равенств (3.5), (3.8), (3.9), получаем

$$\lim_{t\to 0}\left|\vec{u}_{2D}(t)\right| = \frac{3K_{sl}D_{12}\rho_e\sqrt{\nu}}{R\left|\rho_e-\rho_i\right|}\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} * g_\infty(t)\right]. \qquad (3.10)$$

Отметим, что в обоих частях соотношения (3.10) рассматриваются пределы неотрицательных величин. Равенство (3.10) возможно только тогда, когда разность плотностей ρ_e, ρ_i берется по абсолютной величине.

Выясним асимптотические соотношения, существующие между функциями $\left|\vec{u}_{2D}(t)\right|$ и $g_\infty(t)$. Из равенства (3.3) имеем, что эти функции при $t\to\infty$ асимптотически пропорциональны или, допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что нестационарная составляющая диффузиофоретической скорости сферической частицы и строго нестационарный градиент концентрации имеют один и тот же порядок при больших значениях времени (независимо от соотношения между ρ_e, ρ_i). Равенство (3.6), справедливое при $\rho_e-\rho_i=0$, позволяет заключить, что функции $\left|\vec{u}_{2D}(t)\right|$, $g_\infty(t)$ при $t\to 0$ имеют один и тот же порядок, если $\rho_e-\rho_i=0$.

При $\rho_e-\rho_i\neq 0$ имеет место равенство (3.10), следовательно, $\left|\vec{u}_{2D}(t)\right|$ является функцией более высокого порядка малости, чем $g_\infty(t)$, т. е.

$$\left|\vec{u}_{2D}(t)\right| = o\left[g_\infty(t)\right] \quad (t\to 0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
2. *Ефремов В.Е., Кузьмин М.К.* Решение гидродинамической задачи в теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей сферической частицы// Вестник МГОУ. – Серия «физика-математика». – М.: изд. МГОУ. – 2012, №2. – С. 15-29.
3. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – СПб.: Лань, 2002. – 688 с.
5. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 472 с.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Издательство МГУ, Наука, 2004. – 798 с.
7. *Яламов Ю.И., Галоян В.С.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. – Ереван: Луйс, 1985. – 208 с.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1968. – 344 с.

THE SOLUTION OF DIFFUSION PROBLEM IN THE THEORY OF NONSTATIONARY DIFFUSIOPHORESIS OF LARGE NON-VOLATILE SOLID SPHERICAL PARTICLE

V. Efremov, M. Kuzmin

Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The authors continue construction of the theory of nonstationary diffusiophoresis of large non-volatile solid spherical particle in a viscous gas medium. The solution of diffusion problem is carried out. This problem is divided into stationary and strictly nonstationary parts. Final formula for determining stationary diffusiophoresis velocity component of the particle was obtained. For determining nonstationary diffusiophoresis velocity component of this particle corresponding formula in the space of Laplace images was obtained. Dependence of nonstationary diffusiophoresis velocity component of the particle from strictly nonstationary concentration gradient at large and small values of time was obtained using theorems about limiting values from operational calculus.
Keywords: nonstationary diffusiophoresis, large spherical particle, diffusion problem, concentration gradient.

УДК 533.72

ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ИСПАРЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ КАПЛИ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ДАВЛЕНИЯ НАСЫЩЕННОГО ПАРА ОТ КРИВИЗНЫ ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

М.К. Кузьмин

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Строится теория нестационарного процесса испарения неподвижной аэрозольной капли сферической формы, уделяя при этом основное внимание учету коэффициента поверхностного натяжения вещества капли. В работе проведен подробный анализ предельных выражений, полученных из найденной в ней формулы скорости изменения радиуса капли, справедливой для всех значений времени.
Ключевые слова: нестационарный процесс испарения, давление насыщенного пара, коэффициент поверхностного натяжения, предельные выражения, скорость изменения радиуса капли.

ВВЕДЕНИЕ

При построении общей теории нестационарного процесса испарения и конденсационного роста аэрозольной капли важное значение приобретает учет наиболее существенных факторов, влияющих на рассматриваемый процесс. Для точности получаемых