УДК 517.15, 517.521

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СУММАМИ РИССА

А.В. Баскаков, В.М. Простокишин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Найдены асимптотически точные константы в оценках порядка приближения непрерывных периодических функций операторами типа свёртки посредством второго модуля непрерывности. Полученный результат применён для построения оценок приближения функций суммами Рисса.
Ключевые слова: Асимптотика, операторы типа свёртки, модуль непрерывности, суммы Рисса.

Зададим на отрезке $[-\pi;\pi]$ последовательность четных положительных функций $\{K_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность положительных чисел $r_n \downarrow 0$. Для операторов вида

$$U_n(f,x)=\frac{1}{\Delta_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(t-x)dt \qquad (1)$$

в [1] было показано, что

$$\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq const}}\frac{\|f(x)-U_n(f,x)\|_C}{\omega(f,r_n)}=1+\frac{2}{\Delta_n}\int_0^{\pi}\left[\frac{t}{r_n}\right]K_n(t)dt, \qquad (2)$$

где $[a]$ – целая часть числа a, $\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt.$

В частном случае, для операторов Валле-Пуссена, подобный результат был получен в работе [2].

Покажем, что соотношение, аналогичное (1), имеет место и для второго модуля непрерывности. Справедлива

Лемма. Для операторов типа свёртки (1) и произвольной последовательности $r_n \downarrow 0$ выполняется равенство

$$\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq const}}\frac{\|f(x)-U_n(f,x)\|_C}{\omega_2(f,r_n)}=1+\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\pi}\left(\left[\frac{t}{r_n}\right]^2+2\left[\frac{t}{r_n}\right]\right)K_n(t)dt.$$

Доказательство. Для любого числа $x\in[-\pi;\pi]$ справедливо неравенство:

$$
\begin{aligned}
&\left|f(x)-U_n(f,x)\right| = \left|\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\pi}\left(2f(x)-f(x+t)-f(x-t)\right)K_n(t)dt\right| \le \\
&\le \frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\pi}\omega_2(f,t)K_n(t)dt \le \frac{1}{\Delta_n}\omega_2(f,r_n)\int_0^{\pi}\left(\left[\frac{t}{r_n}\right]+1\right)^2 K_n(t)dt = \\
&= \omega_2(f,r_n)\left\{1+\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\pi}\left(\left[\frac{t}{r_n}\right]^2+2\left[\frac{t}{r_n}\right]\right)K_n(t)dt\right\}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Теперь фиксируем число n. Рассмотрим множество четных функций $f_k(x),\ k > r_n^{-1}$, определенных на $[0;\infty)$ следующим образом:

$$
f_k = \begin{cases}
kt, \ \ t\in[0;\ k^{-1}]; \\
1, \ \ \ t\in(k^{-1};\ r_n]; \\
1+3k(t-r_n), \ \ t\in(r_n;\ r_n+k^{-1}]; \\
4, \ \ t\in(r_n+k^{-1};\ 2r_n]; \\
\ldots \\
1+(m^2-1)k(t-r_n(m-1)), \ \ t\in((m-1)r_n;\ (m-1)r_n+k^{-1}]; \\
m^2, \ \ t\in((m-1)r_n+k^{-1};\ mr_n;\ ]; \\
\ldots
\end{cases}
$$

Так как второй модуль непрерывности у этих функций $\omega_2(f_k,r_n)=2$ и значение предела

$$
\lim_{k\to\infty} f_k(t) = \left(\left[\frac{|t|}{r}\right]+1\right)^2
$$

почти всюду при $t\in[-\pi;\ \pi]$, то выполняется соотношение

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq const}} \frac{\left\|f(x)-U_n(f,x)\right\|_C}{\omega_2(f,r_n)} \ge \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\pi} f_{k(t)}K_n(t)dt = \\
&= 1+\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\pi}\left(\left[\frac{t}{r_n}\right]^2+2\left[\frac{t}{r_n}\right]\right)K_n(t)dt
\end{aligned} \tag{4}
$$

Из соотношений (3),(4) и вытекает справедливость Леммы.

В качестве применения доказанного утверждения рассмотрим приближение непрерывных функций $f(x)$ средними Рисса:

$$R_n^k(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{s=1}^{n}\left(1-\frac{s}{n}\right)^k(a_s\cos(sx)+b_s\sin(sx)).$$

Таким образом, для второго модуля непрерывности справедлива следующая

Теорема. Для любого положительного числа A и натурального k имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq const}}\frac{\left\|f(x)-R_n^k(f,x)\right\|_C}{\omega_2(f,\frac{A}{\sqrt{n}})}=1+\frac{k}{A^2}+\overset{=}{o}(1),\quad k\to\infty.$$

Для первого модуля непрерывности аналогичный результат был ранее получен А.И.Сюсюкаловым [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А.В.* О некоторых наилучших константах приближения непрерывных функций сингулярными интегралами // Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1983. С. 3-12.
2. *Schurer F., Steutel F.* On the Degree of Approximation by the Operators of de la Vallee – Poussin. –Monatsh.// Math. 1979. 87 , №1. P.53-63
3. *Сюсюкалов А.И.* Аппроксимативные свойства линейных средних рядов Фурье и сопряженных рядов: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1991.

ON THE ORDER OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS USING SUMS OF RIESZ

A. Baskakov, V. Prostokishin

National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. Asymptotically exact constants in the estimates of the order of approximation of continuous periodic functions by operators of convolution type through the second modulus of continuity are found. This result is used to construct estimates of approximation of functions by the sums of Riesz.

Key words: Asymptotics, operators of convolution type, modulus of continuity, sums of Riesz.