УДК 517.95

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ В ФИКСИРОВАННЫХ ТОЧКАХ

В.В. Соловьёв

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. В статье рассматриваются обратные задачи для параболического уравнения общего вида в случае задачи Коши и первой и второй краевых задач в ограниченной области. В качестве дополнительной информации о решении прямой задачи (переопределении) используются значения решения прямой задачи в фиксированных точках для всех моментов времени. Для случая линейного уравнения сформулированы теоремы существования и единственности решения рассматриваемых обратных задач. Для случая нелинейного уравнения сформулированы теоремы единственности решения рассматриваемых обратных задач.
Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, переопределение в фиксированной точке.

Пусть

$$E_T = R^n \times (0,T]\,, T>0\,, x \in R^n\,,$$

заданы вектор-функции

$$f:[0,T]\to R^N\,, f(t)=(f_1(t),...,f_n(t))\,, h:E_T\to R^N\,, h(x,t)=(h_1(x,t),...,h_N(x,t))\,.$$

Определим функциональные пространства

$$F[0,T]=(C[0,T])^N\,, U_0(E_T)=\{u\in C(\overline{E}_T): u\in C^{2,1}_{x,t}(E_T)\}\,,$$
$$U_1(E_T)=\{u\in C(\overline{E}_T): u\in C^{2,1}_{x,t}(\overline{E}_T)\}\,.$$

1. Случай задачи Коши. Единственность.

Для постановки обратной задачи выберем произвольный набор различных точек $x^{(k)}\in R^n, k=1,...,N$. Далее будем обозначать

$$O_r(x^{(k)})=\{x\in R^n : |x-x^{(k)}|<r\} -$$

не пересекающиеся шары с центрами в точках $x^{(k)}$ ($r>0$ достаточно мало), цилиндр

$$Q_k(r)=O_r(x^{(k)})\times(0,T]\,.$$

Далее будут использованы следующие функциональные пространства

$$U_1^r(E_T)=\{u\in U_0(\overline{E}_T): u\in C^{2,1}_{x,t}(\overline{Q}_k(r)), k=1,...,N\}\,.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U_0(E_T) \times F[0,T]$ из условий:

$$u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = f_l(x) h_l(x,t) + g(x,t), (x,t) \in E_T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in R^n, \tag{1}$$

$$u(x^{(k)}, t) = \psi^{(k)}(t), t \in [0,T], k = 1,..., N. \tag{2}$$

В уравнении (1):

$$(Lu)(x,t) = a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j}(x,t) + b_i(x,t) u_{x_i}(x,t) + c(x,t) u(x,t),$$

для уравнения выполнены условия равномерной параболичности

$$\lambda_0 |\xi|^2 \le a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \le \lambda_1 |\xi|^2, \lambda_0, \lambda_1 > 0.$$

В приведённой формуле и всюду далее по повторяющимся индексам проводится суммирование в соответствующих пределах изменения индексов $i, j, l.$ Обратная задача (1)-(2) изучалась в ряде работ, историю вопроса и дальнейшие ссылки см. [1],[2]. Для задачи (1)-(2) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Пусть справедливы включения*

$$a_{ij}, b_i, c, h_l, g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{E}_T), \text{ где } 0 < \alpha < 1,$$

выполнено неравенство

$$|\det(h_l(x^{(k)}, t)| \ge h_0 > 0.$$

Тогда обратная задача (1)-(2) не может иметь двух различных решений.

Аналогичная теорема справедлива для нелинейного уравнения. Пусть

$$a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l \in R, (x,t) \in \bar{E}_T -$$

независимые переменные,

$$F(a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l, x, t), \ N(x,c) -$$

вещественнозначные функции определённые на множествах

$$S_1(E_T) = R \times R^{n^2} \times R^n \times R^N \times \bar{E}_T, \ \ S_2(E_T) = R^n \times R.$$

Определим пространства функций

$$U_2(E_T) = C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{E}_T), \ F_1[0,T] = (C^{\alpha/2}[0,T])^N.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_2(E_T)\times F_1[0,T]$ из следующих условий:

$$F(u_t(x,t),u_{x_ix_j}(x,t),u_{x_i}(x,t),u(x,t),f_l(t),x,t)=0,(x,t)\in E_{T,}$$

$$N(x,u(x,0))=0,x\in R^n, \quad (3)$$

$$u(x^{(k)},t)=\psi^{(k)}(t),t\in[0,T],k=1,...,N. \quad (4)$$

Для задачи (3)-(4) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Функция F и её вторые производные по переменным a_0,a_{ij},b_i,c,f_l непрерывны на множестве $S_1(E_T)$, её первые производные по этим переменным удовлетворяют условию Гёльдера по переменным (x,t) с показателями $\alpha,\alpha/2$ соответственно на любом ограниченном множестве лежащем в $S_1(E_T)$.*

2) *Функция $N(x,c)$ и её первые производные по c непрерывны на множестве $S_2(E_T)$.*

3) *На множестве $S_1(E_T)$ выполнены условия параболичности*

$$F_{a_0}\ge\rho_0>0,\ -F_{a_{ij}}\xi_i\xi_j\ge\nu_0\,|\,\xi\,|^2,\nu_0>0,$$

где $\rho_0>0,\nu_0>0-$ фиксированные постоянные.

Тогда, если на множествах $S_1(E_T)$, $S_2(E_T)$ выполнены неравенства

$$|\det(F_{f_l}(a_0,a_{ij},b_i,c,f_{l,}x^{(k)},t)|=|\det H_{kl}(t)|\ge h_0>0,\ |N_c(x,c)|\ge n_0>0,$$

где h_0,n_0- некоторые фиксированные постоянные, то обратная задача (3)-(4) не может иметь двух различных решений.

2. Случай первой и второй краевых задач. Единственность.

Пусть $D\subset R^n, D-$ ограниченная область с границей класса $C^{1.\alpha}$,

$$\Omega_T=D\times(0,T],\Gamma_T=\partial D\times[0,T].$$

Определим пространства функций

$$U_0(\Omega_T)=\{u\in C(\overline{\Omega}_T):u\in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T)\}.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_0(\Omega_T)\times F[0,T]$ из следующих условий:

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=f_l(t)h_l(x,t)+g(x,t),(x,t)\in\Omega_{T,}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),x\in\overline{D},(Bu)(x,t)=\mu(x,t),(x,t)\in\Gamma_T, \quad (5)$$

$$u(x^{(k)},t)=\psi^{(k)}(t),t\in[0,T],k=1,...,N. \quad (6)$$

Краевые условия в условиях (5) - либо первого либо второго рода (см. [3]), $x^{(k)} \in D, k=1,...,N,$ $\bar{O}_r(x^{(k)}) \subset D.$ Для задачи (5)-(6) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 3. *Пусть справедливы включения*:

$$a_{ij}, b_i, c, h_l, g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{E}_T), \ (a_{ij})_{x_k} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_r(r)).$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$|\det(h_l(x^{(k)},t)| \geq h_0 > 0,$$

то задача (5)-(6) не может иметь двух различных решений.

Сформулируем аналогичную теорему для случая нелинейного уравнения. Пусть

$$a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l \in R, (x,t) \in \bar{\Omega}_T -$$

независимые переменные,

$$N(x,c),\ G(x,t,c)\ (G_1(x,t,c)),\ \ F(a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l, x, t) -$$

вещественнозначные функции определённые на множествах

$$S_2(D) = \bar{D} \times R,\ S_3(\Gamma_T) = \Gamma_T \times R, \quad S_1(\Omega_T) = R \times R^{n^2} \times R^n \times R^N \times \bar{\Omega}_T.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f) \in U_2(\Omega_T) \times F_1[0,T]$ из условий:

$$F(u_t(x,t), u_{x_i x_j}(x,t), u_{x_i}(x,t), u(x,t), f_l(t), x, t) = 0, (x,t) \in \Omega_{T,}$$
$$N(x, u(x,0)) = 0,\ x \in \bar{D},$$

$$G(x,t,u(x,t)) = 0, (G_1(x,t,u_\nu(x,t)) = 0), (x,t) \in \Gamma_T, \tag{7}$$

$$u(x^{(k)},t) = \psi^{(k)}(t), t \in [0,T], k = 1,...,N. \tag{8}$$

В условиях (7) для случая второй краевой задачи ν − внешняя конормаль (см. [3]).

Для задачи (7)-(8) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Функция ***F*** *и её вторые производные по переменным* a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l

непрерывны на множестве $S_1(\Omega_T)$, *её первые производные по этим переменным удовлетворяют условию Гёльдера по переменным* (x,t) *с показателями* $\alpha, \alpha/2$ *соответственно на любом ограниченном множестве лежащем в* $S_1(\Omega_T)$.

2) Функции $N(x,c)$, $G(x,t,c)$, $(G_1(x,t,c))$ *и их первые производные по* c *непрерывны на множествах* $S_2(D)$, $S_3(\Gamma_T)$.
3) На множестве $S_1(\Omega_T)$ *выполнены условия параболичности*

$$F_{a_0} \geq \rho_0 > 0, -F_{a_{ij}}\xi_i\xi_j \geq \nu_0 \,|\, \xi\,|^2, \nu_0 > 0,$$

где $\rho_0 > 0, \nu_0 > 0 -$ *фиксированные постоянные.*

Тогда, если на множествах $S_1(\Omega_T)$, $S_2(D)$, $S_3(\Gamma_T)$ *выполнены неравенства*

$$|\det(F_{f_l}(a_0, a_{ij}, b_i, c, f_{l,} x^{(k)}, t)\,| = |\det H_{kl}(t)| \geq h_0 > 0, |\, N_c(x,c)| \geq n_0 > 0,$$
$$|\, G_c(x,t,c)| \geq g_0 > 0, \; (|\,(G_1)_c(x,t,c)| \geq g_0 > 0),$$

где $h_0, n_0, g_0 -$ *некоторые фиксированные постоянные, то обратная задача (7)-(8) не может иметь двух различных решений.*

3. Случай задачи Коши. Существование.

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f) \in U_1^{r/2}(E_T) \times F[0,T]$ из условий (1)-(2). Для этой задачи верна следующая теорема существования.
Теорема 5. *Пусть справедливы включения*

$$a_{ij}, b_i, c, h_l, g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{E}_T), \quad \varphi \in C(R^n) \cap C^{2,\alpha}(O_r(x^{(k)})), \quad \psi_k \in C^1([0,T]),$$

выполнены условия согласования $\psi_k(0) = \varphi(x^{(k)})$ *и неравенство*

$$|\det(h_l(x^{(k)}, t)| \geq h_0 > 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)-(2) в указанном классе.

4. Существование решения обратной задачи в случае первой краевой задачи.

Рассмотрим задачу определения пары функций $(u,f) \in U_1^{r/2}(\Omega_T) \times F[0,T]$ из условий:

$$u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = f_l(t)h_l(x,t) + g(x,t), (x,t) \in \Omega_{T,}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in \overline{D}, u(x,t) = \mu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T, \tag{9}$$

$$u(x^{(k)}, t) = \psi^{(k)}(t), t \in [0,T], k = 1,...,N. \tag{10}$$

Для задачи (9)-(10) справедлива следующая теорема существования.

Теорема 6. *Пусть справедливы включения*

$$a_{ij}, b_i, c, h_l, g, \left(a_{ij}\right)_{x_k} \in C^{\alpha,\alpha/2}\left(\overline{E}_T\right),$$
$$\varphi \in C\left(R^n\right) \cap C^{2,\alpha}\left(O_r\left(x^{(k)}\right)\right), \psi_k \in C^1\left(\left[0,T\right]\right), \mu \in C\left(\varGamma_T\right).$$

Тогда, если выполнены условия согласования:

$$\psi_k(0) = \varphi(x^{(k)}),\ \mu(x,0) = \varphi(x), x \in \partial D$$

и неравенство:

$$|\det(h_l(x^{(k)},t)| \geq h_0 > 0$$

то задача (9)-(10) имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Prilepko A.I.,Orlovsky D.G.,Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York-Basel: Marcel Dekker Inc.,2000.
2. *Соловьёв В.В.* Определение источника и коэффициентов в параболическом уравнении в многомерном случае. // Дифференциальные уравнения, т.31, №6, 1995. С. 1060-1069.
3. *Ладыженская О.А.,Солонников В.А.,Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., Наука,1987.

ABOUT INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH OVERDETERMINATION IN FIXED POINTS

V. Soloviev

National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. In this paper the inverse problems for the parabolic equations for Cauchy problems and for the first and the second bounded problems are considered . Additional information for the direct problems (overdetermination) is given in the fixed points for any specific f time. The existence and uniqueness theorems for linear equations of parabolic type are formulated. For nonlinear equations of parabolic type the uniqueness theorems are formulated.
Keywords: inverse problems, parabolic equation, overdetermination.