МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРИРОВАННОЙ ПОЛУГРУППОЙ

Д.Г. Орловский

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Изучается обратная задача по определению неоднородного члена эволюционного уравнения с оператором, порождающим интегрированную полугруппу. Рассмотрена модельная двухточечная обратная задача, получены формулы, определяющие решение этой задачи.
Ключевые слова: банахово пространство, дифференциальное уравнение, интегрированная полугруппа, обратная задача.

В банаховом пространстве X рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + p, \quad 0 \le t \le T, \\ u(0) = x, \\ u(T) = y. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что оператор A является производящим генератором n-проинтегрированной невырожденной полугруппы $S(t)$ [1], $u_0,\ p \in X$. В задаче (1) требуется найти $u(t) \in C^1([0;T], X) \cap C([0,T]; D(A)),\ p \in X$.

Ранее двухточечная обратная задача (1) рассматривалась для оператора A, порождающего сильно непрерывную полугруппу [1].

Прежде чем переходить к обратной задаче, рассмотрим свойства прямой задачи

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 \le t \le T, \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2}$$

Лемма. Пусть функция $f(t) \in C^{n+1}([0;T]; X)$ и существует последовательность

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

для которой

$$x_0 = x,\ x_{k+1} = Ax_k + f^{(k)}(0)\ (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Тогда решение задачи (2) дается формулой

$$u(t) = S(t)x_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x_k + \int_0^t S(t-s) f^{(n)}(s) ds. \qquad (3)$$

Доказательство. Согласно [1] решение задачи (2) тесно связано с решением интегрального уравнения

$$v(t) = A\int_0^t v(s)ds + \frac{t^n}{n!} x + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} f(s) ds. \qquad (4)$$

Решением уравнения (4) является функция

$$v(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s) f(s) ds, \qquad (5)$$

а решение задачи (2) дается формулой

$$u(t) = v^{(n)}(t).$$

Дифференцируя равенство (5) n раз с использованием формулы

$$\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)Ax + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} x$$

Получаем равенство (3). Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению обратной задачи (1). Полагая $f(t) = p$ находим последовательность

$$x_0 = x,\ x_k = A^k x + A^{k-1}\mathrm{p}\ (k = 1,...,n).$$

Следовательно, решение прямой задачи

$$u(t) = S(t)A^n x + S(t)A^{n-1} p + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^{k-1} p. \qquad (6)$$

Здесь предполагается, что элементы $x \in D(A^{n+1}), p \in D(A^n)$. Полагая в равенстве (6) $t = T$, получаем уравнение для неизвестного элемента p

$$Bp = g,$$

где

$$B = S(T)A^{n-1} + \sum_{k=}^{n-1} \frac{T^k}{k!} A^{k-1},$$

$$g = y - S(T)A^n x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^k}{k!} A^k x.$$

Следствие. Пусть оператор

$$B(t) = S(t)A^{n-1} + \sum_{k=}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^{k-1}$$

обратим при $t = T$, тогда решение обратной задачи (1) единственно и дается формулами:

$$\begin{cases} p = B^{-1}g, \\ u(t) = S(t)A^n x + B(t)B(T)^{-1} g. \end{cases}$$

Отметим частный случай один раз проинтегрированной полугруппы. Решение обратной задачи дается формулами:

$$\begin{cases} p = S(T)^{-1}[y - S(T)Ax - x], \\ u(t) = S(t)Ax + x + S(t)S(T)^{-1}[y - S(T)Ax - x]. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arendt W.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problem / W. Arendt //Israel J. Math. – 1987. 59(3). – P. 327–352.

DEFINITION OF PARAMETERS OF THE EVOLUTION EQUATION WITH INTEGRATED SEMIGROUP

D. Orlovsky

National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstarct: Studied the inverse problem on determination of the inhomogeneous member of the evolutionary equation with the operator, generating integrated semigroup. Considered a model point-to-point inverse problem, we obtained the formulas that determine the solution of this problem.
Keywords: Banach space, differential equation, integrated semigroup, the inverse problem.