ФИЗИКА

УДК 533.72

РЕШЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФУЗИОФОРЕЗА КРУПНОЙ ТВЕРДОЙ НЕЛЕТУЧЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

В.Е. Ефремов, М.К. Кузьмин

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Авторы начинают построение теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Приводится решение гидродинамической задачи, которая разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения этой задачи получены формулы, позволяющие получить зависимость стационарной и нестационарной составляющих диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы от соответствующих слагаемых градиента концентрации.
Ключевые слова: нестационарный диффузиофорез, крупная сферическая частица, гидродинамическая задача, градиент концентрации.

1. Постановка задачи

В статье ставится задача построения теории нестационарного диффузиофоретического движения крупной твердой нелетучей частицы сферической формы с учетом диффузионного скольжения газа вдоль поверхности частицы. Рассмотрим одиночную твердую нелетучую частицу сферической формы радиуса *R*, взвешенную в неоднородной по концентрации бинарной газовой смеси. Будем полагать, что мы имеем дело с вязкой несжимаемой газовой средой. Относительные концентрации молекул смеси определяются следующим образом:

$$C_1 = \frac{n_1}{n},\ C_2 = \frac{n_2}{n},$$

где n_1, n_2 – числа молекул первого и второго видов соответственно в единице объема смеси и $n_1 + n_2 = n$. Причем

$$C_1 + C_2 = 1.$$

В дальнейшем будем рассматривать первый компонент смеси в качестве диффундирующего. Обозначим через λ_1, λ_2 средние длины свободного пробега молекул первого и второго видов соответственно. Выбор метода решения задачи построения теории нестационарного диффузиофореза твердой нелетучей сферической аэрозольной частицы зависит от отношения средних длин свободного пробега молекул газа к размеру аэрозольной частицы [10]. Мы полагаем, что $\lambda_1/R \ll 1$, $\lambda_2/R \ll 1$, т. е., рассматриваем крупную сферическую частицу. Поэтому в исследованиях привлекаем классические методы динамики сплошной среды [6, 7]. При использовании уравнения Навье-Стокса предполагаем, что число Рейнольдса мало.

Для частицы, имеющей сферическую форму, математические выкладки удобно проводить в сферической системе координат (r,θ,φ) с началом в центре частицы. На относительно большом удалении от частицы ($r >> R$) предположим наличие во внешней газовой среде градиентов концентраций $[\nabla C_1(t)]_\infty$ и $[\nabla C_2(t)]_\infty$ (t – время), причем

$$[\nabla C_1(t)]_\infty = -[\nabla C_2(t)]_\infty .$$

Для определенности будем считать, что направление градиента концентрации $[\nabla C_1(t)]_\infty$ совпадает с направлением полярной оси. Согласно выбору начала системы координат, частицу будем считать покоящейся, а центр инерции внешней среды движущимся относительно частицы при $r \to \infty$ со скоростью $\vec{u} = \vec{u}(t)$. При этом скорость диффузиофореза частицы относительно центра инерции внешней среды будет равна:

$$\vec{u}_D(t) = -\vec{u}(t).$$

Картина обтекания сферической частицы потоком газа имеет азимутальную симметрию из-за выбора направления полярной оси вдоль вектора $[\nabla C_1(t)]_\infty$. Поэтому рассматриваемые переменные величины не зависят от угла φ. Такое поле течения называется осесимметричным.

Дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой среды в сферических координатах при ее осесимметричном течении без учета действия массовых сил можно представить в виде [7]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r v_\theta \sin\theta\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\Delta_{r\theta} v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2v_\theta}{r^2} ctg\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right), \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_e r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta_{r\theta} v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$\Delta_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right],$$

v_r, v_θ – соответственно радиальная и касательная компоненты локальной среднемассовой скорости газовой среды $\vec{v}(r,\theta,t)$, ν – кинематический коэффициент вязкости, ρ_e – плотность среды, $P = P(r,\theta,t)$ – давление. Равенство (1.1) является условием несжимаемости среды.

На достаточно большом расстоянии от частицы (при $r \to \infty$) справедливы граничные условия [11]:

$$v_{r|r\to\infty} = |\vec{u}|\cos\theta, \qquad (1.3)$$

$$v_{\theta|r\to\infty} = -|\vec{u}|\sin\theta. \qquad (1.4)$$

На поверхности частицы справедливо граничное условие:

$$v_{r|r=R} = 0, \qquad (1.5)$$

показывающее, что твердая поверхность частицы неподвижна.

Распределение концентрации первого компонента бинарной газовой смеси удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_{12}\Delta_{r\theta}C_1,$$

где D_{12} – коэффициент диффузии.

На поверхности частицы выполняется граничное условие:

$$\frac{\partial C_1}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0.$$

Это условие означает, что на поверхности частицы не происходит изменения концентрации первого компонента смеси.

При $r \to \infty$ справедливо граничное условие:

$$C_1 = C_{01} + \left|\left[\nabla C_1(t)\right]_\infty\right| r\cos\theta,$$

где $C_{01} = \dfrac{n_{01}}{n_0}$ (n_{01} – среднее число молекул первого компонента газовой смеси в единице объема, n_0 – среднее число молекул газовой смеси в единице объема).

Учет явления диффузионного скольжения газа вдоль поверхности частицы описывается следующим граничным условием [11]:

$$v_{\theta|r=R} = \frac{K_{sl}D_{12}}{R}\frac{\partial C_1}{\partial\theta}\Big|_{r=R}, \qquad (1.6)$$

где K_{sl} – коэффициент диффузионного скольжения.

При построении теории нестационарного диффузиофореза мы предполагаем, что при нулевом значении времени имеет место его стационарный случай, а при значениях времени $t > 0$ происходит наложение строго нестационарного диффузиофореза на имеющийся стационарный процесс. Поэтому необходимо провести разделение граничных условий для стационарного и строго нестационарного случаев диффузиофореза.

Для давления полагаем:

$$P(r,\theta,t) = P_1(r,\theta) + P_2(r,\theta,t),$$

$$P_1(r,\theta) = P(r,\theta,t)_{|t=0},$$

следовательно,

$$P_2(r,\theta,t)_{|t=0} = 0.$$

Проведем дальнейшее разделение граничных условий для стационарного и строго нестационарного случаев диффузиофореза. Полагаем:

$$C_1(r,\theta,t) = C_1^{(1)}(r,\theta) + C_1^{(2)}(r,\theta,t), \tag{1.7}$$

$$\vec{v}(r,\theta,t) = \vec{v}_1(r,\theta) + \vec{v}_2(r,\theta,t), \tag{1.8}$$

причем,

$$C_1^{(1)}(r,\theta) = C_1(r,\theta,t)_{|t=0}, \tag{1.9}$$

$$\vec{v}_1(r,\theta) = \vec{v}(r,\theta,t)_{|t=0}, \tag{1.10}$$

следовательно,

$$C_1^{(2)}(r,\theta,t)_{|t=0} = 0, \tag{1.11}$$

$$\vec{v}_2(r,\theta,t)_{|t=0} = 0, \tag{1.12}$$

В силу равенств (1.12), (1.14), (1.16) следует считать, что

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2(t), \tag{1.13}$$

$$\vec{u}_1 = \vec{u}(t)_{|t=0}, \tag{1.14}$$

$$\vec{u}_2(t)_{|t=0} = 0. \tag{1.15}$$

2. Решение стационарной и строго нестационарной частей гидродинамической задачи для крупной сферической частицы

Продолжим разделение граничных условий для стационарного и строго нестационарного случаев гидродинамической задачи. Из граничных условий (1.3) – (1.5) с учетом равенств (1.8), (1.10), (1.12) – (1.15) получаем следующие условия при $t = 0$:

$$v_{r|r\to\infty}^{(1)} = |\vec{u}_1|\cos\theta, \tag{2.1}$$

$$v_{\theta|r\to\infty}^{(1)} = -|\vec{u}_1|\sin\theta, \tag{2.2}$$

$$v^{(1)}_{r|r=R} = 0 \tag{2.3}$$

и при $t > 0$:

$$v^{(2)}_{r|r\to\infty} = \left|\vec{u}_2\right| \cos\theta , \tag{2.4}$$

$$v^{(2)}_{\theta|r\to\infty} = -\left|\vec{u}_2\right| \sin\theta , \tag{2.5}$$

$$v^{(2)}_{r|r=R} = 0 , \tag{2.6}$$

где $\vec{u}_2 = \vec{u}_2(t)$. Из граничного условия (1.6) в силу равенств (1.7) – (1.12) получаем при $t = 0$ и при $t > 0$ соответственно

$$v^{(1)}_{\theta|r=R} = \frac{K_{sl} D_{12}}{R} \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial \theta}\Big|_{r=R} , \tag{2.7}$$

$$v^{(2)}_{\theta|r=R} = \frac{K_{sl} D_{12}}{R} \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial \theta}\Big|_{r=R} . \tag{2.8}$$

Перейдем непосредственно к решению гидродинамической задачи. На основании условия несжимаемости среды (1.1) можно ввести функцию тока $\psi = \psi(r, \theta, t)$ осесимметричного течения, полагая

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} . \tag{2.9}$$

Используя оператор Стокса:

$$D_S = \Delta_{r\theta} - \frac{2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{ctg\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right),$$

уравнения (1.2) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial t} = \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial D_S \psi}{\partial \theta} , \\ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\nu}{\sin\theta} \frac{\partial D_S \psi}{\partial r} . \end{gathered} \tag{2.10}$$

Исключив из уравнений (2.10) давление, получим следующее дифференциальное уравнение с частными производными:

$$\frac{\partial D_S \psi}{\partial t} = \nu D_S D_S \psi \ . \tag{2.11}$$

Функцию тока будем искать в виде

$$\psi = \sin^2\theta \ \ f(r,t), \tag{2.12}$$

где $f(r,t)$ – неизвестная функция. Полагаем

$$f(r,t) = f_1(r) + f_2(r,t), \quad f(r,t)_{|t=0} = f_1(r), \tag{2.13}$$

следовательно,

$$f_2(r,t)_{|t=0} = 0\,, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r}_{|t=0} = 0\,. \tag{2.15}$$

В силу равенства (2.12) дифференциальное уравнение (2.11) представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2f}{r^2}\right) = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2f}{r^2}\right). \tag{2.16}$$

Если функции $f_1(r)$ и $f_2(r,t)$ являются решениями дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} - \frac{2f_1}{r^2}\right) = 0\,, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} - \frac{2f_2}{r^2}\right) = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} - \frac{2f_2}{r^2}\right) \tag{2.18}$$

соответственно, то их сумма (2.13) будет решением дифференциального уравнения (2.16).

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.17). Оно является уравнением Эйлера [8]. Его общее решение имеет вид:

$$f_1(r) = \frac{A_1}{r} + B_1 r + C_1 r^2 + D_1 r^4\,, \tag{2.19}$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи.

Используя соотношения (2.9), (2.12), (2.13), находим выражения

$$v_r = -\frac{2\cos\theta}{r^2}\left[f_1(r) + f_2(r,t)\right],\ v_\theta = \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{df_1}{dr} + \frac{\partial f_2}{\partial r}\right). \qquad (2.20)$$

Отсюда при $t = 0$ в силу равенств (2.14), (2.15) получаем радиальную и касательную компоненты вектора $\vec{v}_1 = \vec{v}(r,\theta,t)_{|t=0}$:

$$v_r^{(1)} = v_{r|t=0} = -\frac{2\cos\theta}{r^2} f_1(r),\ v_\theta^{(1)} = v_{\theta|t=0} = \frac{\sin\theta}{r}\frac{df_1}{dr}. \qquad (2.21)$$

Из граничных условий (2.1) – (2.3) в силу соотношений (2.19), (2.21) находим

$$A_1 = R^2\left(\frac{|\vec{u}_1|}{2}R - B_1\right),\ C_1 = -\frac{|\vec{u}_1|}{2},\ D_1 = 0. \qquad (2.22)$$

Рассмотрим систему уравнений (2.10) при $t = 0$. Пусть

$$\psi_1 = \psi(r,\theta,t)_{|t=0} = \sin^2\theta\ \ f_1(r).$$

Тогда получаем следующую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial r} &= -\frac{\eta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial D_S\psi_1}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial P_1}{\partial\theta} &= \frac{\eta}{\sin\theta}\frac{\partial D_S\psi_1}{\partial r}, \end{aligned} \qquad (2.23)$$

где η – коэффициент динамической вязкости. Решая систему дифференциальных уравнений (2.23) с учетом равенств (2.22), находим

$$P_1(r,\theta) = -\frac{2B_1\eta}{r^2}\cos\theta + P_{01} \qquad (2.24)$$

где P_{01} – независящая от r и θ постоянная величина, которую можно определить заданием одного из граничных условий

$$P_{01} = P_1(r,\theta)_{|r\to\infty},\ P_{01} = P_1(r,\theta)_{|\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

Равнодействующая всех сил, приложенных к элементам сферической частицы в вязком несжимаемом потоке внешней среды, выражается в виде интеграла по ее поверхности:

$$F = \iint\limits_S (\sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)_{|r=R}\, ds = \int\limits_0^\pi (\sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)_{|r=R}\, 2\pi R^2\sin\theta\ \ d\theta, \qquad (2.25)$$

где σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений. Они имеют выражения [6]

$$\sigma_{rr} = -P + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r},\ \sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right).$$

Найдем выражение равнодействующей силы $F^{(1)}$, приложенной к сферической частице в момент времени $t = 0$. В интеграле вида (2.25) для определения силы $F^{(1)}$ подынтегральная функция зависит от величин

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr|t=0},\ \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta|t=0}$$

при $r = R$. Используя выражения (2.21), (2.24), находим

$$\sigma_{rr|r=R}^{(1)} = \frac{6\eta\cos\theta}{R^2}\left(\frac{2A_1}{R^2} + B_1 \right) - P_{01},\ \sigma_{r\theta|r=R}^{(1)} = \frac{6A_1\eta}{R^4}\sin\theta .$$

Учитывая первое из равенств (2.22), получаем

$$F^{(1)} = 8\pi\eta B_1 . \qquad (2.26)$$

Скалярное выражение (2.26) суммарной силы $F^{(1)}$, действующей на сферическую частицу, получено при значениях скорости, независящей от времени. При движении частицы с постоянной скоростью эта суммарная сила равна нулю:

$$\vec{F}^{(1)} = \vec{F}_D^{(1)} + \vec{F}_C^{(1)} = \vec{0}, \qquad (2.27)$$

где $\vec{F}_D^{(1)}$ – диффузиофоретическая сила, а $\vec{F}_C^{(1)}$ – сила сопротивления среды. Учитывая (2.26) и (2.27), находим:

$$B_1 = 0 . \qquad (2.28)$$

В силу равенств (2.22) и (2.28) имеем выражение:

$$f_1(r) = \frac{|\vec{u}_1|}{2}\left(\frac{R^3}{r} - r^2 \right),$$

с учетом которого по второй из формул (2.21) получаем:

$$v_\theta^{(1)} = -|\vec{u}_1|\sin\theta\left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right).$$

В силу последнего равенства из граничного условия (2.7) находим следующее условие, учитывающее явление диффузионного скольжения газа в стационарном случае диффузиофореза:

$$\left|\vec{u}_1\right| = -\frac{2K_{sl}D_{12}}{3R\sin\theta}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial\theta}_{|r=R} . \tag{2.29}$$

Перейдем к решению нестационарной части гидродинамической задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными (2.18). Применим к нему интегральное преобразование Лапласа вида [3, 5]

$$F_2(r,p) = L\{f_2(r,t)\} = \int_0^\infty f_2(r,t)e^{-pt}dt , \tag{2.30}$$

где p – комплексный параметр. С учетом начального условия (2.14) получаем в пространстве изображений соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left[\frac{d^2F_2}{dr^2} - F_2\left(\frac{2}{r^2} + \frac{p}{\nu}\right)\right] = 0 . \tag{2.31}$$

Введем обозначение

$$\frac{d^2F_2}{dr^2} - F_2\left(\frac{2}{r^2} + \frac{p}{\nu}\right) = G .$$

Тогда дифференциальное уравнение (2.31) представится в виде

$$\frac{d^2G}{dr^2} - \frac{2G}{r^2} = 0 .$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$G = \frac{A_2}{r} + B_2r^2 ,$$

где A_2, B_2 – произвольные постоянные.

Таким образом, для изображения $F_2(r,p)$ имеем следующее неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2F_2}{dr^2} - \left(\frac{2}{r^2} + \frac{p}{\nu}\right)F_2 = \frac{A_2}{r} + B_2r^2 . \tag{2.32}$$

Легко проверить, что выражение

$$-\frac{\nu}{p}\left(\frac{A_2}{r}+B_2r^2\right)$$

является частным решением уравнения (2.32). Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2F_2}{dr^2}-\left(\frac{2}{r^2}+\frac{p}{\nu}\right)F_2=0$$

выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [4, 5. 12]

$$I_{3/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\frac{1}{z}shz+chz\right),\; K_{3/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\left(1+\frac{1}{z}\right)e^{-z}$$

следующим образом

$$F_2(r,p)=\left[C_2I_{3/2}\left(r\sqrt{p/\nu}\right)+D_2K_{3/2}\left(r\sqrt{p/\nu}\right)\right]\sqrt{r}\,.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения (2.32) можно записать так:

$$F_2(r,p)=-\frac{\nu}{p}\left(\frac{A_2}{r}+B_2r^2\right)+\left[C_2I_{3/2}\left(r\sqrt{p/\nu}\right)+D_2K_{3/2}\left(r\sqrt{p/\nu}\right)\right]\sqrt{r}\,. \tag{2.33}$$

Здесь A_2, B_2, C_2, D_2 – произвольные постоянные, которые будут определены условиями рассматриваемой задачи.

Рассмотрим выражения радиальной и касательной компонент $v_r^{(2)}$, $v_\theta^{(2)}$ вектора $\vec{v}_2(r,\theta,t)$, которые с учетом соотношений (1.8), (2.9), (2.12) и (2.13) имеют вид

$$v_r^{(2)}=-\frac{2\cos\theta}{r^2}f_2(r,t),\; v_\theta^{(2)}=\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f_2}{\partial r}\,.$$

Применив к ним преобразование Лапласа, с учетом обозначения (2.30) получаем:

$$L\{v_r^{(2)}\}=V_r^{(2)}=-\frac{2\cos\theta}{r^2}F_2(r,p),\; L\{v_\theta^{(2)}\}=V_\theta^{(2)}=\frac{\sin\theta}{r}\frac{dF_2}{dr}\,. \tag{2.34}$$

В соответствии с граничными условиями (2.4) – (2.6), (2.8) в пространстве изображений имеем равенства:

$$\left.\frac{F_2(r,p)}{r^2}\right|_{r\to\infty}=-\frac{U_2}{2}, \tag{2.35}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{dF_2}{dr}\right)_{|r\to\infty} = -U_2\,, \tag{2.36}$$

$$F_2(r,p)_{|r=R} = 0\,, \tag{2.37}$$

$$\frac{dF_2}{dr}\Big|_{r=R} = \frac{K_{sl}D_{12}}{\sin\theta}\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial\theta}\Big|_{r=R}\,, \tag{2.38}$$

где

$$U_2 = L\{|\vec{u}_2|\},\ S_1^{(2)} = L\{C_1^{(2)}\}.$$

Как показывает соотношение (2.35) предел выражения $F_2(r,p)/r^2$ при $r\to\infty$ должен быть конечным. Следовательно, в выражении (2.33) в силу свойств его слагаемых должно быть:

$$C_2 = 0\,. \tag{2.39}$$

В силу равенства (2.37) имеем:

$$D_2 = \frac{\nu}{p\sqrt{R}}\left(\frac{A_2}{R} + B_2R^2\right)K_{3/2}^{-1}\left(R\sqrt{p/\nu}\right). \tag{2.40}$$

Давление

$$P_2(r,\theta,t) = P(r,\theta,t) - P_1(r,\theta)$$

удовлетворяет уравнениям вида (2.10). Заменив в них P и ψ на P_2 и $\psi_2 = \psi - \psi_1$ соответственно, получим систему дифференциальных уравнений для определения P_2:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\theta\partial t} = \frac{1}{\rho_e}\frac{\partial P_2}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2\sin\theta}\frac{\partial D_S\psi_2}{\partial\theta}\,,$$
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r\partial t} = -\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial P_2}{\partial\theta} + \frac{\nu}{\sin\theta}\frac{\partial D_S\psi_2}{\partial r}\,.$$

Применив к полученным уравнениям преобразование Лапласа (2.30), находим соответствующие уравнения в пространстве изображений

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_2}{\partial r} &= -2\eta\left(\frac{A_2}{r^3} + B_2\right)\cos\theta\,,\\ \frac{\partial Q_2}{\partial\theta} &= -\eta\left(\frac{A_2}{r^2} - 2B_2r\right)\sin\theta\,,\end{aligned} \tag{2.41}$$

где

$$Q_2 = Q_2(r, \theta, p) = L\{P_2(r, \theta, t)\},$$

η – коэффициент динамической вязкости. Решая систему уравнений (2.41), находим

$$Q_2(r, \theta, p) = \eta\left(\frac{A_2}{r^2} - 2B_2 r\right)\cos\theta + Q_{02}(p), \tag{2.42}$$

где

$$Q_{02}(p) = Q_2(r, \theta, p)_{|\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

Найдем изображение $W^{(2)}(p)$ равнодействующей всех зависящих от времени сил, приложенных к элементам сферической частицы в вязком несжимаемом потоке внешней среды. В пространстве изображений оно выражается в виде следующего интеграла:

$$W^{(2)}(p) = \int_0^{\pi} \left(S_{rr}^{(2)} \cos\theta - S_{r\theta}^{(2)} \sin\theta\right)_{|r=R} 2\pi R^2 \sin\theta \quad d\theta,$$

где

$$S_{rr}^{(2)} = -Q_2 + 2\eta \frac{\partial V_r^{(2)}}{\partial r}, \; S_{r\theta}^{(2)} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta^{(2)}}{\partial r} - \frac{V_\theta^{(2)}}{r}\right).$$

Используя выражения (2.34), (2.42) с учетом равенств (2.39), (2.40) находим

$$W^{(2)} = -4\pi\eta A_2. \tag{2.43}$$

Движение сферической частицы в окружающей ее среде можно рассматривать как происходящее в пустоте, если только использовать эффективную массу этой частицы, которая складывается из массы самой частицы и из присоединенной массы, равной половине массы вещества внешней среды, вытесняемого сферической частицей. Следовательно, в пространстве изображений с учетом равенства (1.15) имеем

$$W^{(2)} = \frac{4\pi R^3}{3}\left(\rho_i + \frac{\rho_e}{2}\right) p U_2, \tag{2.44}$$

где ρ_i – плотность вещества сферической частицы.

Из соотношений (2.43), (2.44) находим:

$$A_2 = -\frac{R^3}{3\eta}\left(\rho_i + \frac{\rho_e}{2}\right) p U_2. \tag{2.45}$$

Оставшуюся неопределенной величину B_2 в выражении (2.33) можно определить с помощью любого из условий (2.35), (2.36), учитывая равенство (2.39). Она имеет выражение:

$$B_2 = \frac{pU_2}{2\nu}. \tag{2.46}$$

В силу найденных выражений (2.39), (2.40), (2.45), (2.46) имеем:

$$F_2(r,p) = \frac{U_2}{6\rho_e r} \times$$
$$\times \left[R^3(2\rho_i + \rho_e) - 3\rho_e r^3 + 2(\rho_e - \rho_i) Rr\sqrt{Rr} K_{3/2}^{-1}\left(R\sqrt{p/\nu}\right) K_{3/2}\left(r\sqrt{p/\nu}\right)\right]$$

Отсюда находим:

$$\frac{dF_2}{dr}_{|r=R} = -U_2 R\left[\frac{3}{2} + \frac{R^2(\rho_e - \rho_i)}{3\rho_e}\frac{p}{\nu + R\sqrt{\nu\cdot p}}\right].$$

С учетом последнего равенства условие (2.38) можно представить в виде:

$$U_2 = -\frac{K_{sl}D_{12}}{R\sin\theta} F_U(p) \frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial\theta}\Big|_{r=R}, \tag{2.47}$$

где

$$F_U(p) = \frac{6\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu\cdot p}\right)}{2R^2(\rho_e - \rho_i)p + 9\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu\cdot p}\right)}. \tag{2.48}$$

Как показывают выражения (2.47), (2.48), характер дальнейшего решения задачи по определению нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы $\vec{u}_{2D}(t) = -\vec{u}_2(t)$ зависит от соотношения плотностей внешней газовой среды и вещества частицы.

Пусть $\rho_e - \rho_i \neq 0$. При этом ассоциированный со знаменателем выражения (2.48) квадратный трехчлен:

$$g_0 z^2 + g_1 z + g_2,$$

где

$$g_0 = 2R^2(\rho_e - \rho_i),\ g_1 = 9R\rho_e\sqrt{\nu},\ g_2 = 9\rho_e\nu,$$

имеет различные, отличные от нуля вещественные корни:

$$z_j = -\frac{3\rho_e\sqrt{\nu}}{4R(\rho_e - \rho_i)}\left[3 + (-1)^j\sqrt{1 + 8\rho_i/\rho_e}\right]\ \ (j = 1,\ 2).$$

Поэтому, применив к выражению (2.48) обратное преобразование Лапласа [2], находим:

$$L^{-1}\{F_U(p)\}=6\rho_e\left[\frac{R}{g_0}\sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}+\frac{z_1\left(\nu+Rz_1\sqrt{\nu}\right)}{g_0(z_1-z_2)}e^{z_1^2 t}erfc\left(-z_1\sqrt{t}\right)+\frac{z_2\left(\nu+Rz_2\sqrt{\nu}\right)}{g_0(z_2-z_1)}e^{z_2^2 t}erfc\left(-z_2\sqrt{t}\right)\right].$$

В последнем равенстве обозначим через $f_u(t)$ выражение, стоящее в квадратных скобках. Тогда при $\rho_e-\rho_i\neq 0$ в пространстве оригиналов получаем:

$$\left|\vec{u}_2\right|=-\frac{6K_{sl}\eta}{R\sin\theta}f_u(t)*\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial\theta}\Big|_{r=R},$$

где символ $*$ обозначает операцию свертывания.

В случае $\rho_e=\rho_i$ соотношение (2.48) принимает более простой вид, из которого находим равенство:

$$\left|\vec{u}_2\right|=-\frac{2K_{sl}D_{12}^{(e)}}{3R\sin\theta}\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial\theta}\Big|_{r=R},$$

аналогичное равенству (2.29), имеющему место в стационарном случае диффузиофореза.

Для того, чтобы получить окончательные формулы, описывающие зависимость стационарной и нестационарной составляющих диффузиофоретической скорости сферической частицы от соответствующих слагаемых градиента концентрации, необходимо решить надлежащую диффузионную задачу и определить выражения:

$$\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial\theta}\Big|_{r=R},\ \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial\theta}\Big|_{r=R}.$$

Решение диффузионной задачи будет опубликовано в следующем номере журнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баринова М. Ф., Костицына Л. И., Яламов Ю.И.* Теория движения твердой сферической частицы в неоднородной вязкой среде. – М.: Издательство МГОУ, 2005. – 120 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
3. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – СПб.: Лань, 2002. – 688 с.

6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 736 с.
7. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 520 с.
8. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 472 с.
9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Издательство МГУ, Наука, 2004. – 798 с.
10. *Фукс Н. А.* Механика аэрозолей. – М.: Издательство АН СССР, 1955. – 352 с.
11. *Яламов Ю. И., Галоян В. С.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. – Ереван: Луйс, 1985. – 208 с.
12. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1968. – 344 с.

THE SOLUTION OF HYDRODYNAMIC PROBLEM IN THE THEORY OF NONSTATIONARY DIFFUSIOPHORESIS OF LARGE NON-VOLATILE SOLID SPHERICAL PARTICLE

V. Efremov, M. Kuzmin

Moscow state regional university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The authors begin construction of the theory of nonstationary diffusiophoresis of large non-volatile solid spherical particle in a viscous gas medium. The solution of hydrodynamic problem is carried out. This problem is divided into stationary and strictly nonstationary parts. Formulas allowing to determine the dependence of stationary and nonstationary diffusiophoresis velocity components of the particle from corresponding terms of concentration gradient were obtained.
Keywords: nonstationary diffusiophoresis, large spherical particle, hydrodynamic problem, concentration gradient.