V. Kozenkov, N. Sokolyuk, V. Belyaev, A. Spakhov, G. Tumovskii

Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. Both sensitometric and photoanisotropic properties of photosensitive 6-phenoxy 5,12-naphtacenequinone (6-Ph-5,12-NQ or PNQ) substances in different polymeric matrices have been investigated in a single-photon mode of light sources continuous activating radiation. Maximum phase retard and birefringence value realization conditions are described. The effect allows polarization holograms recording as well as non-destructive reading-out of reconstructed images.
Key words: photochromic substances, phenoxy naphtacenequinone derivatives, single-photon mode, phase retard, birefringence, holographic recording and reading-out.

УДК: 530.145:530.12;537.8:530.145

ЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ КИРАЛЬНЫХ ФЕРМИОНОВ СО ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЧАСТИЦЕЙ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Н.В. Зверев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул.Радио, д.10а

Аннотация. Рассмотрена локальная модель киральных фермионов со вспомогательной частицей в дискретном пространстве-времени в двух внешних полях: однородном и неоднородном. Показано, что при определённом соотношении для массы вспомогательной частицы данная модель согласуется с непрерывной теорией.
Ключевые слова: киральные фермионы, решётка пространства-времени, локальные модели.

1. Введение

Модели киральных фермионов, характеристики которых не инвариантны относительно операции изменения знака всех пространственных координат, используют для изучения элементарных частиц нейтрино [1]. Для расчётов физических характеристик этих частиц во всей области их параметров рассматривают модели фермионов в дискретном пространстве-времени (на решётке) [2].

Но прямая замена непрерывных производных на локальные дискретные приводит к несогласию дискретной и непрерывной моделей киральных фермионов в случае бесконечного дискретного пространства-времени [3]. Для устранения этого несогласия в таком пространстве-времени предложено добавить вспомогательные нефизические частицы [4]. Однако исследования моделей в конечном дискретном пространстве-времени (на конечной решётке) выполнены не были.

В данной работе приведены результаты исследований [5] локальной модели киральных фермионов со вспомогательной частицей на двумерной конечной решётке на согласие с непрерывной теорией.

2. Модель киральных фермионов на решётке без вспомогательной частицы в однородном внешнем поле

В данной работе рассматриваем модель киральных фермионов 11112, т.е. модель, описывающую четыре положительно-киральных фермиона с безразмерным зарядом 1 и один отрицательно-киральный фермион с безразмерным зарядом 2 [6]. Фундаментальная величина данной модели – действие – имеет вид [6]:

$$S_{CW} = \sum_{k=1}^{4} S_{+}[\psi_{+k}, U] + S_{-}[\psi_{-}, U^2].$$

Здесь

$$S_{\pm}[\Psi, U] = \sum_{x,y} \overline{\Psi}_x \mathbf{M}^{(\pm)}_{xy}[U]\Psi_y = \sum_{x,\mu} \left\{ \overline{\Psi}_x \gamma_\mu (P_{\pm}\nabla_\mu[U] + P_{\mp}\partial_\mu)\Psi_x + \partial_\mu \overline{\Psi}_x \partial_\mu \Psi_x \right\};$$

$\mathbf{M}^{(\pm)}{}_{x,y}[U]$ – матрица положительно- или отрицательно-кирального фермиона, ∂_μ и $\nabla_\mu[U]$ – обычная и ковариантная локальные дискретные фермионные производные:

$$\partial_\mu \Psi_x = \Psi_{x+\hat{\mu}} - \Psi_x, \qquad \nabla_\mu[U] = U_{x,\mu}\, \Psi_{x+\hat{\mu}} - \Psi_x;$$

x, y – узлы двумерной решётки пространства-времени с координатами $x_\mu, y_\mu = -N/2+1, -N/2+2, \ldots, N/2-1, N$; N – чётное число узлов решетки по одному направлению; направление пространства-времени $\mu = 1, 2$; шаг решётки $a = 1$ и кроме того, здесь используется система единиц $\hbar = c = 1$; γ_1, γ_2 – матрицы Дирака в двумерном пространстве-времени:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix};$$

P_+ и P_- – положительно- и отрицательно-киральные проекторы:

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$U_{x,\mu} = \exp(\mathrm{i}\, A_{x,\mu})$ – внешнее поле с вещественным потенциалом $A_{x,\mu}$, $\psi_{+k,x}$ – волновые функции четырёх положительно-киральных фермионов; $k = 1, 2, 3, 4$; $\psi_{-,x}$ – волновая функция отрицательно-кирального фермиона. Волновые функции фермионов обладают свойством антиперестановочности при перемножении, поскольку только в этом случае обеспечивается выполнение принципа Паули. Граничные условия для $U_{x,\mu}$ и ψ_x имеют вид:

$$U_{x\pm N\hat{\nu},\mu} = U_{x,\mu}, \qquad \psi_{x\pm N\hat{\nu}} = -\psi_x, \qquad \mu, \nu = 1, 2.$$

Интегрирование exp($-S_{VS}$) по волновым функциям ψ_{+k}, $k = 1, 2, 3, 4$, и ψ_{-} в силу свойства антиперестановочности при перемножении этих функций приводит к детерминанту фермионных матриц:

$$\int \exp(-S_{CW})\,[\mathrm{d}\bar{\psi}\,\mathrm{d}\psi] = \det\left(\mathbf{M}^{(+)}[U]^4\,\mathbf{M}^{(-)}[U^2]\right) = D_{CW},$$

Этот детерминант является производящей функцией всех фермионных корреляционных функций.

В однородном внешнем поле с потенциалом [6]

$$A_{x,\mu} = \frac{2\pi}{N} h_\mu,$$

где вещественные числа h_μ не зависят от x, данный детерминант имеет вид [6]:

$$D_{CW}[h] = D_{+W}[h]^4\, D_{+W}[2h]^*,$$

где

$$D_{+W}[h] = \prod_{p_1, p_2 = -N/2+1}^{N/2} \frac{B_+(p,h)B_-(p,0) + W^2(p)}{|B_+(p,0)|^2 + W^2(p)},$$

* – операция комплексного сопряжения. Здесь обозначено:

$$B_\pm(p,h) = B_1(p,h) + \mathrm{i}B_2(p,h),$$

$$B_\mu(p,h) = \sin\frac{2\pi}{N}(p_\mu - h_\mu - 1/2), \quad W(p) = \sum_{\mu=1}^{2} 2\sin^2\frac{\pi(p_\mu - 1/2)}{N}.$$

Аналитические исследования и численные расчёты показали [5], что в пределе $N \to \infty$ $D_{CW}[h]$ не согласуется с детерминантом непрерывной двумерной 11112 модели киральных фермионов, равным в однородном внешнем поле [6]

$$D_{CC}[h] = D_{+C}[h]^4\, D_{+C}[2h]^*,$$

где обозначено:

$$D_{+C}[h] = \exp(\mathrm{i}\pi h_2(h_1 + \mathrm{i}h_2)) \prod_{n=1}^{\infty} F[n,h]F[n,-h],$$

$$F[n,h] = \frac{1 + \exp\left(-2\pi(n - 1/2) + 2\mathrm{i}\pi(h_1 + \mathrm{i}h_2)\right)}{1 + \exp\left(-2\pi(n - 1/2)\right)}.$$

Поэтому 11112 модель киральных фермионов на двумерной решётке требует усовершенствования – введения вспомогательных частиц.

3. Модель киральных фермионов на решётке со вспомогательной частицей в однородном внешнем поле

Действие модели имеет вид [5]:

$$S_{CR} = S_{CW} + \sum_{x,\mu} \left\{ \overline{\phi}_x (\gamma_\mu \nabla_\mu [U^2] + M) \phi_x + \partial_\mu \overline{\phi}_x \partial_\mu \phi_x \right\}.$$

Здесь ϕ_x – волновая функция нефизической некиральной бозонной частицы с зарядовым числом 2 и массой M, удовлетворяющая тем же граничным условиям, что и волновые функции ψ_x киральных фермионов.

Интегрирование $\exp(-S_{CR})$ по волновым функциям ψ_{+k}, $k = 1, 2, 3, 4$, ψ_- и ϕ приводит к детерминанту, равному в однородном внешнем поле:

$$D_{CR}[h] = D_{CW}[h] \prod_{p_1, p_2 = -N/2+1}^{N/2} \frac{|B_+(p,0)|^2 + W^2(p) + M^2}{|B_+(p,2h)|^2 + W^2(p) + M^2} .$$

Детерминанты D_{CR} и D_{CC} являются комплексными величинами: $D = |D|\, e^{i\mathrm{Arg} D}$. Введение вспомогательной частицы изменяет только модуль детерминанта D_{CR}, не затрагивая его аргумент, т.е. $\mathrm{Arg}\, D_{CR} = \mathrm{Arg}\, D_{CW}$.

Аналитические исследования и численные расчёты показали [5], что в однородном внешнем поле имеют место следующие оценки:

$$\frac{\partial^3}{\partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda} \ln(\, |D_{CR}[h]| \,/\, |D_{CC}[h]|\,) = O(1/MN) + O(1/N), \qquad \mu, \nu, \lambda = 1, 2;$$

$$\mathrm{Arg}\, D_{CR}[h] = \mathrm{Arg}\, D_{CC}[h] + O(1/N),$$

$$\Pi_{CR}(0) = \Pi_{CC}(0) + O(M^2 N) + O(1/MN),$$

где

$$\Pi_{CR}(0) = -\frac{\partial^2}{\partial h_1^2} \ln |D_{CR}[h]| \Bigg|_{h_1 = h_2 = 0}, \qquad \Pi_{CC}(0) = -\frac{\partial^2}{\partial h_1^2} \ln |D_{CC}[h]| \Bigg|_{h_1 = h_2 = 0},$$

и, кроме того,

$$\Pi_{CR}(0) \,/\, \Pi_{CC}(0) = \max$$

при массе M вспомогательной частицы, равной $M = M_0(N) \sim N^{-0.75}$. Поэтому в пределе $N \to \infty$ в однородном внешнем поле детерминант киральной 11112 модели на решётке $D_{CR}[h]$ при массе вспомогательной частицы $M = M_0(N)$ согласуется с детерминантом непрерывной киральной 11112 модели $D_{CC}[h]$ (рис.1).

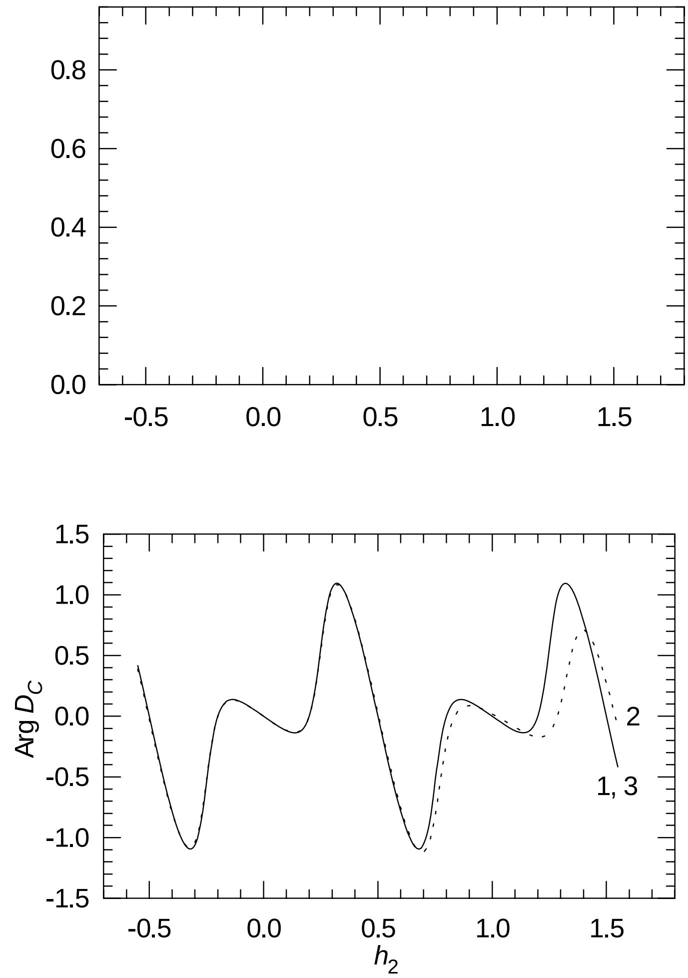

Рис.1. Модули $|D_C|$ и аргументы Arg D_C киральных 11112 моделей
в зависимости от h_2 однородного внешнего поля при $h_1 = 0.2$ [5]:
1 – $|D_{CC}|$ и Arg D_{CC} непрерывной модели;
2, 3 – $|D_{CR}|$ и Arg D_{CR} модели на решётке при массе $M = M_0(N)$:
2 – $N = 32$;
3 – $N = 160$.

4. Модель киральных фермионов на решетке со вспомогательной частицей в неоднородном внешнем поле

В результате интегрирования $\exp(-S_{CR})$ по волновым функциям ψ_{+k}, $k = 1, 2, 3, 4$, ψ_- и ϕ возникает детерминант, имеющий следующее выражение во внешнем поле U общего вида [5]:

$$D_{CR} = D_{+W}\,[U]^4\, D_{+W}\,[U^2]^* \det \frac{\mathbf{B}[1]\mathbf{B}^+[1] + \mathbf{W}^2 + M^2}{\mathbf{B}[U^2]\mathbf{B}^+[U^2] + \mathbf{W}^2 + M^2}\ ,$$

где

$$D_{+W}\,[U] = \det\, \frac{\mathbf{B}[U]\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}^{+}[1]\mathbf{W} + \mathbf{W}^2}{\mathbf{B}[1]\mathbf{B}^{+}[1] + \mathbf{W}^2}\,.$$

Здесь матрицы $\mathbf{B}[U]$ и $\mathbf{W}$ имеют вид:

$$\mathbf{B}_{xy}[U] = \frac{1}{2}(U_{x,1}\delta_{x+\hat{1},y} - U^*_{y,1}\delta_{x,y+\hat{1}}) + \frac{i}{2}(U_{x,2}\delta_{x+\hat{2},y} - U^*_{y,2}\delta_{x,y+\hat{2}})\,,$$

$$\mathbf{W}_{xy} = \frac{1}{2}(4\delta_{xy} - \delta_{x+\hat{1},y} - \delta_{x+\hat{2},y} - \delta_{x,y+\hat{1}} - \delta_{x,y+\hat{2}})\,,$$

$\mathbf{B}[1]$ – матрица $\mathbf{B}[U]$ во внешнем поле с $A_{x,\mu} = 0$, $^+$ – операция эрмитова сопряжения по координатам x, δ_{xy} – символ Кронекера для координат x и y.

Потенциал неоднородного внешнего поля имеет вид [6]:

$$A_{x,\mu} = \frac{2\pi}{N}\,h_\mu \cos\frac{2\pi}{N}\,(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_\mu / 2),$$

где вещественные величины h_μ не зависят от x_1 и x_2 ; x_μ , k_μ = $-N/2 + 1, \ldots, N/2$; μ = 1, 2; $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$. В данном неоднородном внешнем поле детерминант модели $D_{CR} = D_{CR}\,[h, k]$.

Детерминант непрерывной киральной 11112 модели в неоднородном внешнем поле имеет вид [6]:

$$D_{CC}[h, k] = \exp\left\{-4\pi\frac{(k_1 h_2 - k_2 h_1)^2}{k_1^2 + k_2^2}\right\},$$

где k_1 и k_2 – целые числа, причём $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$.

Аналитические исследования и численные расчёты показали [5], что в неоднородном внешнем поле в пределе $N \to \infty$ при указанной выше массе вспомогательной частицы $M = M_0(N)$ детерминант $D_{CR}\,[h, k]$ модели на решётке согласуется с непрерывным детерминантом $D_{CC}\,[h, k]$ (рис. 2).

6. Заключение

В данной работе приведены результаты аналитических и численных исследований локальной киральной модели фермионов со вспомогательной частицей на двумерной конечной решётке. Показано, что как в однородном, так и в неоднородном внешних полях киральная модель на решётке при определённой зависимости массы вспомогательной частицы от числа узлов решётки согласуется с непрерывной теорией.

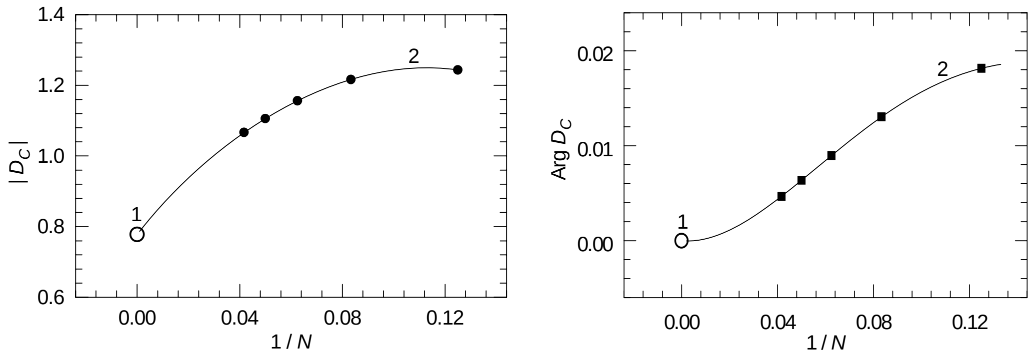

Рис. 2. Модули $|D_C|$ и аргументы Arg D_C киральных 11112 моделей
в зависимости от $1 / N$ в неоднородном внешнем поле
при $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.4$ и $k_1 = k_2 = 1$ [5]:
1 – $|D_{CC}|$ и Arg D_{CC} непрерывной модели;
2 – $|D_{CR}|$ и Arg D_{CR} модели на решётке при массе $M = M_0(N)$.

Полученные результаты целесообразно использовать при исследованиях моделей фермионов методом решётки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Славнов, А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М. Наука. 1988. 272 с.
2. *Wilson, K.G.* Confinement of quarks // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445–2459.
3. *Borelli, A., Maiani L., Rossi G., Sisto R., Testa M.* Neutrions on the lattice. The regularization of a chiral gauge theory // Nucl. Phys. B. 1990. V. 333. P. 335–356.
4. *Frolov, S.A., Slavnov A.A.* Removing fermion doublers in chiral gauge theories on the lattice // Nucl. Phys. B. 1994. V. 411. P. 647–664.
5. *Зверев, Н.В.* Регуляризованные U(1) модели фермионов на решётке. М. «Прометей» МПГУ. 2004. 126 с.
6. *Narayanan, R., Neuberger H.* Anomaly free U(1) chiral gauge theories on a two dimensional torus // Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 521–548.

LOCAL MODEL OF CHIRAL FERMIONS WITH AUXILIARY PARTICLE IN THE DISCRETE SPACE-TIME

N. Zverev

Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. A local model of chiral fermions with auxiliary particle in the discrete space-time in two external fields (uniform and non-uniform) is considered. It is shown that at certain relation for the mass of the auxiliary particle, the model agrees with a continuum theory.
Keywords: chiral fermions, space-time lattice, local models.