УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.В. Соловьёв

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Приведена формулировка теоремы единственности для обратной задачи определения правой части параболического уравнения с переопределением на верхней крышке в случае первой краевой задачи. Сформулированы теоремы существования и единственности для обратной задачи определения коэффициента в параболическом уравнении. Приведены примеры функций удовлетворяющих всем условиям теоремы существования и единственности.
Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, переопределение на верхней крышке.

Пусть $G \subset R^n$ - ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$, $0<\alpha<1, T>0$ - фиксированные числа. В цилиндре $\Omega_T = G\times(0,T]$ рассмотрим обратные задачи для уравнения параболического типа с переопределением на верхней крышке.

1. Задача 1.Определить пару функций $u \in C(\overline{\Omega}_T)\cap C^{2,1}(\Omega_T)$, $f \in C^{\alpha}(\overline{G})$ из условий:

$$\rho(x,t)u_t(x,t) = (Lu)(x,t) + f(x)h(x,t) + g(x,t), (x,t)\in\Omega_T,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), x\in\overline{G}, u(x,t)=\mu(x,t),(x,t)\in\Gamma_T=\partial G\times[0,T], \tag{1}$$

$$u(x,T)=\chi(x), x\in\overline{G}. \tag{2}$$

В уравнении (1):

$$(Lu)(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x,t)+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(x,t)+c(x,t)u(x,t),$$

$$c(x,t)\le 0\ ,\qquad \lambda_0|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda_1|\xi|^2, \lambda_0,\lambda_1>0.$$

Обратная задача (1)-(2) изучалась в целом ряде работ, историю вопроса и дальнейшие ссылки см. [1]. В данной работе формулируется теорема единственности для задачи (1)-(2) и теорема существования для задачи определения коэффициента обобщающая результат работы [2].

Теорема 1. Пусть справедливы включения:

$$a_{ij}, b_i \in C^{\alpha}(\bar{G}), \rho, c, h, \rho_t, \qquad c_t, h_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T),$$

выполнены неравенства:

$$\rho(x,t) \ge \rho_0 > 0, c(x,t) \le 0, \qquad c_t(x,t) \ge 0, h(x,t)h_t(x,t) \ge 0, (x,t) \in \bar{\Omega}_T.$$

Тогда обратная задача (1)-(2) не может иметь двух различных решений тогда и только тогда когда носитель функции $h(x,T)$ совпадает с $\bar{G}$.

Всюду далее под нормой функции понимается обычная *sup*-норма. Кроме того, если задана вещественнозначная функция $g(y)$,то, как обычно,

$$g^+(y) = \max\{g(y), 0\}, g^-(y) = |g(y)| - g^+(y).$$

Определим следующие функциональные пространства

$$U(\Omega_T) = C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T),$$
$$U_1(\Omega_T) = \{u \in U(\Omega_T) : u_t \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_T) \cap C\ (\bar{\Omega}_T) = V(\Omega_T)\},$$
$$F(G) = \{f \in C^{\alpha}(\bar{G}) : f(x) \le 0\}.$$

2. Задача 2. Рассмотрим обратную задачу определения пары функций:

$$(u, f) \in U_1(\Omega_T) \times F(G)$$

из условий:

$$u_t(x,t) = (Lu)(x,t) + f(x)u(x,t) + g(x,t), (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in \bar{G}, u(x,t) = \mu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T = \partial G \times [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,T) = \chi(x), x \in \bar{G}. \tag{4}$$

Для задачи (3)-(4) справедлива теорема единственности.

Теорема 2. Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i \in C^{\alpha}(\bar{G}), \varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{G}), \qquad c, g, c_t, g_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T),$$

выполнены неравенства:

$$c(x,t) \le 0, c_t(x,t) \ge 0, \qquad g(x,t) \ge 0, g_t(x,t) \ge 0, (x,t) \in \bar{\Omega}_T,$$

$$\varphi(x) \ge 0, x \in G, \mu(x,t) \ge 0, \mu_t(x,t) \ge 0\ , \quad (x,t) \in \Gamma_T.$$

Тогда:
1) Если $\varphi \equiv 0$ и хотя бы одна из функций g, μ отлична от тождественного нуля то обратная задача (3)-(4) не может иметь двух различных решений.
2) Если φ не тождественный нуль, то определим величину

$$R = \left\|((L\varphi)(x,0) + g(x,0))^{-}\right\| + \left\|((L\chi)(x,T) + g(x,T))^{+}\right\| / (1 - \|\varphi\| / \chi_0).$$

В этом случае, если

$$(L\varphi)(x,0) - R\varphi(x) + g(x.0) \geq 0, x \in G,$$

то обратная задача (3)-(4) не может иметь двух различных решений.

При рассмотрении вопроса о существовании решения обратной задачи (3)-(4) будем предполагать, что

$$c(x,t) \equiv c(x), \varphi(x) \equiv 0, \qquad \chi(x) \geq \chi_0 > 0.$$

Для формулировки теоремы существования определим функцию $\overline{v}(x,t), \overline{v} \in V(\Omega_T)$ как решение следующей краевой задачи:

$$\overline{v}_t(x,t) = (L\overline{v})(x,t) + (g_t)^{+}(x,t), (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\overline{v}(x,0) = g^{+}(x,0), x \in \overline{G}, \overline{v}(x,t) = (\mu_t)^{+}(x,t), (x,t) \in \Gamma_T = \partial G \times [0,T]. \qquad (5)$$

Кроме того, пусть $t_1 \in (0,T)$, t_1-произвольное число, $\Gamma_1 = \partial G \times [t_1, T]$.

Теорема 3. Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha}(\overline{G}), \qquad g, g_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T),$$

$$\mu \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_T), \qquad \mu_t \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_1),$$

выполнены условия согласования

$$\mu(x,0) = 0, \mu_t(x,0) = g(x,0), x \in \partial G$$

и неравенство $c(x) \leq 0.$ Тогда для любой функции $\chi \in C^{2,\alpha}(\overline{G})$ удовлетворяющей условиям согласования:

$$\mu(x,T) = \chi(x), x \in \partial G$$

и неравенствам :

$$\chi(x) \geq \chi_0 > 0, \overline{v}(x,T) - ((L\chi)(x) + g(x,T)) \leq 0, x \in G$$

существует решение задачи (3)-(4).

Из теорем два и три получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть дополнительно к условиям теоремы 3 выполнены условия

$$g(x,t) \geq 0, g_t(x,t) \geq 0, \mu(x.t) \geq 0, \mu_t(x,t) \geq 0.$$

Тогда задача (3)-(4) имеет, и притом, единственное решение в указанном классе функций.

Замечание. Приведённые выше условия существования и единственности решения обратной задачи (3)-(4) содержат довольно много ограничений на заданные функции. Приведём простой пример показывающий, что все эти условия могут быть легко удовлетворены. Пусть

$$\varphi(x) = 0, x \in G, \mu(x,t) = t, g(x,t) = t+1, Lu = \Delta u.$$

Тогда получим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U_1(\Omega) \times F(G)$ из условий:

$$u_t(x,t) = (\Delta u)(x,t) + f(x)u(x,t) + t + 1, (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = 0, x \in \overline{G}, u(x,t) = t, (x,t) \in \Gamma_T, u(x,T) = \chi(x), x \in \overline{G}. \quad (7)$$

Для функции $\overline{v}(x,t)$ из условий (5) получаем задачу:

$$\overline{v}_t(x,t) = (\Delta\overline{v})(x,t) + 1, (x,t) \in \Omega_T, \quad \overline{v}(x,0) = 1, x \in \overline{G}, \overline{v}(x,t) = 1, (x,t) \in \Gamma_T.$$

Тогда для функции χ из теоремы 2 получаем условия

$$\chi(x) \geq \chi_0 > 0, \overline{v}(x,T) - \Delta\chi(x) - (T+1) \leq 0.$$

В силу очевидной оценки $\overline{v}(x,T) \leq T+1$, следующей для $\overline{v}(x,t)$ из принципа максимума, из второго неравенства получаем оценку $\Delta\chi(x) \geq 0, x \in G.$ Таким образом получаем, что для существования единственного решения обратной задачи (7) достаточно чтобы функция χ удовлетворяла условиям:

$$\Delta\chi(x) \geq 0, x \in G, \chi(x) = 1, x \in \partial G, \chi(x) \geq \chi_0 > 0, x \in G.$$

Этим условиям удовлетворяет, например, гармоническая в G функция. Из приведённого примера видно, что множество функций удовлетворяющих условиям теорем существования и единственности достаточно велико.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko, A.I.,Orlovsky D.G.,Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York-Basel: Marcel Dekker Inc.,2000.

2. *Прилепко, А.И.,Соловьёв В.В.* О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении. // Дифференциальные уравнения, т.23, №1, 1987. С. 136-143.

DESIDABILITY OF INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATION

V. Soloviev

National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. In this paper the inverse problems for the parabolic equation in the bounded domain are considered for case of the first bounded problem. Additional information for the direct problems (overdetermination) is given in the fixed moment of time. The existence and uniqueness theorems are formulated. The examples for inverse problems are detailed.
Key words: inverse problems, elliptic equation, overdetermination.

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

В.В. Соловьёв

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Приведены формулировки теорем единственности и существования для обратной задачи определения коэффициента эллиптического уравнения в цилиндре с переопределением на многообразии внутри цилиндра в случае первой краевой задачи. Сформулированы теоремы существования и единственности для обратной задачи определения коэффициента и правой части в эллиптическом уравнении в случае переопределения на верхней крышке цилиндра, а также рассмотрена аналогичная задача в области специального вида. Приведены примеры функций удовлетворяющих всем условиям теоремы существования и единственности.
Ключевые слова: обратная задача, эллиптическое уравнение, переопределение.

Пусть $R^n = \{x_1,...,x_n\}, R^{n+1} = \{y,x\} = \{y,x_1,...,x_n\}$, $0<\alpha<1$, $q_1 < 0 < q_2$ - фиксированные числа $G \subset R^n$ - ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$. В цилиндре $\Omega = (q_1,q_2)\times G \subset R^{n+1}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения эллиптического типа следующего вида:

$$-(a(y,x)u_{yy}(y,x) + (Lu)(y,x)) = f(x)u(y,x) + g(y,x),(y,x)\in\Omega, \quad (1)$$

$$u(y,x) = \nu(y,x),(y,x)\in\Gamma = [q_1,q_2]\times\partial G, u(q_1,x) = u(q_2,x) = 0, x\in\overline{G}. \quad (2)$$

В уравнении (1):

$$(Lu)(y,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(y,x)+c(x)u(y,x),$$

$$a(y,x)\ge a_0>0, c\le 0,\qquad \lambda_0\,|\,\xi\,|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\lambda_1\,|\,\xi\,|^2, \lambda_0,\lambda_1>0.$$

Известно (см.[1]) что задача (1)-(2) при некоторых ограничениях на гладкость заданных в условиях (1)-(2) функций, при условии $f(x)\le 0$ и условиях согласования $\nu(q_i,x)=0, x\in\bar{G}, i=1,2,$ имеет единственное решение в классе функций $U(\Omega)=\{u\in C(\bar{\Omega}): u\in C^{2,\alpha}(\Omega)\}$. Изучение обратной задачи для уравнения (1) проводится в более узком классе функций $U_1(\Omega)=\{u\in U(\Omega): u_{yy}\in U(\Omega)\}$. Приведём формулировку теоремы существования и единственности решения задачи (1)-(2) в классе функций $U_1(\Omega)$. При этом, для сокращения записи, будем использовать следующие обозначения:

$$(Mu)(y,x)=a(y,x)u_{yy}(y,x)+(Lu)(y,x),$$

$$(M_1w)(y,x)=(Mw)(y,x)+2a_y(y,x)w_y(y,x)+a_{yy}(y,x)w(y,x).$$

Теорема 1. Пусть справедливы включения:

$$a_{ij},b_i,c,f\in C^{\alpha}\cap C(\bar{G}),\qquad a,a_{yy},g,g_{yy}\in C^{\alpha}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega}),\qquad \nu,\nu_{yy}\in C(\Gamma),$$

выполнены неравенства:

$$f(x)\le 0,\qquad c(x)+a_{yy}(y,x)\le 0.$$

Тогда для существования единственного решения задачи (1)-(2) в классе $U_1(\Omega)$ необходимо и достаточно выполнения условий согласования

$$\nu(q_i,x)=0, -a(q_i,x)\nu_{yy}=g(q_i,x), x\in\partial G.$$

При этом функция $w=u_{yy}\in U(\Omega)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$-(M_1w)(y,x)=f(x)w(y,x)+g_{yy}(y,x),(y,x)\in\Omega,$$

$$w(y,x)=\nu_{yy}(y,x),(y,x)\in\Gamma, w(q_i,x)=-g(q_i,x)/a(q_i,x), x\in\partial G.$$

Для постановки обратной задачи определения коэффициента определим множество функций:

$$F(G) = \{f \in C(\bar{G}) : f \in C^{\alpha}(G), \quad f(x) \le 0\}.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U_1(\Omega) \times F(G)$ из условий:

$$-(Mu)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), (y,x) \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(y,x) = \nu(y,x), (y,x) \in \Gamma, u(q_i,x) = 0, u(x,0) = \chi(x), x \in \bar{G}. \tag{4}$$

Обратная задача в постановке (3)-(4) изучалась автором в работе [2] для случая оператора Лапласа, в данной работе рассматривается более общий эллиптический оператор. Для задачи (3)-(4) верна следующая теорема единственности.

Теорема 2.Пусть

$$a, a_{yy,} g, g_{yy} \in C^{\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha} \cap C(\bar{G}),$$

выполнены неравенства

$$c(x) + a_{yy}(y,x) \le 0, g(y,x) \ge 0, g_{yy}(y,x) \le 0,$$

$$\nu(y,x) \ge 0, \qquad \nu_{yy}(y,x) \le 0,$$

при этом хотя бы одна из функций ν, g отлична от тождественного нуля. Тогда обратная задача (3)-(4) не может иметь двух различных решений.

Рассмотрим постановки обратных задачи определения коэффициентов и правой части в более узком классе функций:

$$u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) = U_2(\Omega), f \in F_1(G) = \{f \in C^{\alpha}(\bar{G}) : f(x) \le 0\}.$$

При таком выборе функциональных пространств задачу (3)-(4) можно изучить для более общих эллиптических уравнений.

Пусть

$$(L_1 u)(y,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(y,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i}(y,x) + c(y,x)u(y,x),$$

$$(M_2 u)(y,x) = a(y,x)u_{yy}(y,x) + (L_1 u)(y,x).$$

Изучим задачи определения коэффициента и правой части в области Ω симметричной относительно плоскости $y = 0.$ Пусть $q > 0$ – фиксированное число,

$$\Omega = (-q,q) \times G, \quad \Omega_- = (-q,0) \times G, \quad \Gamma = [-q,q] \times \partial G, \quad \Gamma_- = [-q,0] \times \partial G.$$

Рассмотрим сначала обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_2(\Omega)\times C^{\alpha}(\overline{G})$ из условий:

$$-(M_2u)(y,x)=f(x)h(y,x)+g(y,x),\quad (y,x)\in\Omega,\quad u(y,x)=\nu(y,x),$$

$$(y,x)\in\Gamma,\quad u(q,x)=\lambda(x),\quad u(-q,x)=\beta(x),\quad u(0,x)=\chi(x),x\in\overline{G}. \tag{5}$$

Для формулировки теоремы единственности решения задачи (5) определим функции:

$$h_r(y,x)=(h(y,x)+h(-y,x))/2,\ h_n(y,x)=(h(y,x)-\ -h(-y,x))/2,$$

аналогично определяются функции ν_r,ν_n,g_r,g_n. Для задачи (5) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть

$$a,c,a_y,c_y,h_y\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}_-),a_{ij},b_i\in C^{\alpha}(\overline{G}),h\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),$$

выполнены условия симметрии

$$a(y,x)=a(-y,x),c(y,x)=c(-y,x).$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$h_r(y,x)(h_r)_y(y,x)\geq 0,(y,x)\in\Omega,$$

то задача (5) не может иметь двух различных решений тогда и только тогда когда носитель функции $h(0,x)$ совпадает с $\overline{G}$.

В качестве приложения теоремы 3 рассмотрим обратную задачу определения правой части уравнения в случае переопределения на верхней крышке цилиндра (см. [3]). Пусть требуется определить пару функций $(u,f)\in U_2(\Omega)\times C^{\alpha}(\overline{G})$ из условий:

$$\begin{gathered}-(M_2u)(y,x)=f(x)h(y,x)+g,\\ (y,x)\in\Omega_-,\quad u(y,x)=\nu(y,x),\\ (y,x)\in\Gamma_-,\quad u(-q,x)=\beta(x),\\ u_y(0,x)=\gamma(x),\quad u(0,x)=\chi(x),x\in\overline{G}.\end{gathered} \tag{6}$$

Для задачи (6) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 4. Пусть

$$a,c,a_y,c_y,h,h_y\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}_-),a_{ij},b_i\in C^{\alpha}(\overline{G}),$$

справедливо неравенство

$$h(y,x)h_y(y,x)\ge 0,(y,x)\in\Omega_-.$$

Тогда задача (6) не может иметь двух различных решений тогда и только тогда, когда носитель функции $h(0,x)$ совпадает с $\bar{G}$.

Рассмотрим далее задачу определения коэффициента в случае цилиндра симметричного относительно плоскости $y=0$, т.е. задачу определения пары функций $(u,f)\in U_2(\Omega)\times F_1(G)$ из условий:

$$\begin{gathered}-(M_2u)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\\ (y,x)\in\Omega,\quad u(y,x)=\nu(y,x),\\ (y,x)\in\Gamma,\ u(\pm q,x)=0,\quad u(0,x)=\chi(x),x\in\bar{G}.\end{gathered}\tag{7}$$

Теорема 5. Пусть

$$a,c,a_y,c_y,g_y\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_-),a_{ij},b_i\in C^{\alpha}(\bar{G}),g\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}),\ \nu\in C^{2+\alpha}(\Gamma),$$

выполнено неравенство:

$$c_y(y,x)\ge 0,(y,x)\in C(\Omega_-),$$

и условия симметрии

$$a(y,x)=a(-y,x),c(y,x)=c(-y,x).$$

Тогда, если

$$\nu_r(y,x)\ge 0,(\nu_r)_y(y,x)\ge 0,(y,x)\in\Gamma_-,\ \ g_r(y,x)\ge 0,(g_r)_y(y,x)\ge 0,\ \ (y,x)\in\Omega_-$$

и хотя бы одна из функций ν_r,g_r не тождественный ноль, то не может существовать двух различных решений задачи (7).

В качестве приложения теоремы 5 рассмотрим обратную задачу определения коэффициента с переопределением на верхней крышке цилиндра. Пусть требуется определить пару функций $(u,f)\in U_2(\Omega_-)\times F_1(G)$ из условий:

$$\begin{gathered}-(M_2u)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\\ (y,x)\in\Omega_-,\quad u(y,x)=\nu(y,x),\\ (y,x)\in\Gamma_-,\quad u(-q,x)=0,u_y(0,x)=0,\quad u(0,x)=\chi(x),x\in\bar{G}.\end{gathered}\tag{8}$$

Для задачи (8) верна следующая теорема единственности.
Теорема 6. Пусть

$$a,c,g,a_y,c_y,g_y\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_-),a_{ij},b_i\in C^{\alpha}(\bar{G}),\nu\in C^{2+\alpha}(\Gamma_-),$$

выполнены неравенства

$$\nu(y,x)\ge 0, \nu_y(y,x)\ge 0, (y,x)\in\Gamma_-,$$

$$g(y,x)\ge 0, g_y(y,x)\ge 0, (y,x)\in\Omega_-,$$

при этом хотя бы одна из функций ν, g - не тождественный ноль. Тогда не может существовать двух различных решений задачи (8).

Рассмотрим обратные задачи определения коэффициента и правой части в области специального вида с гладкой границей и переопределением внутри области. Будем говорить, что область $\Omega\subset R^{n+1}$ удовлетворяет условию (C), если выполнены следующие требования:

1)существуют такие числа $q, q_1 : 0<q<q_1,$ что для цилиндров

$$Q(q)=(-q,q)\times G, Q(q_1)=(-q_1,q_1)\times G$$

справедливо включение

$$Q(q)\subset\Omega\subset Q(q_1),$$

2) существует такая функция $\mu\in C(\overline{G}),$ что выполнено тождество

$$\Omega=\{(y,x): x\in G, |y|<\mu(x)\},$$

3) граница области Ω является многообразием гладкости $C^{2,\alpha}$.

В области $\Omega\subset R^{n+1}$ удовлетворяющей условию (C) рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_2(\Omega)\times C^{\alpha}(\overline{G})$ из условий:

$$\begin{gathered} -(M_2u)(y,x)=f(x)h(y,x)+g(y,x), \\ (y,x)\in\Omega, \quad u(y,x)=\nu(y,x), \\ (y,x)\in\partial\Omega, \quad u(0,x)=\chi(x), x\in\overline{G}. \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть

$$\Omega_-=\{(y,x)\in\Omega: y<0\}, \quad \partial\Omega_-=\{(y,x)\in\partial\Omega, y\le 0\}.$$

Для задачи (9) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 7. Пусть область Ω удовлетворяет условию (C),

$$a,c,a_y,c_y\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}_-), a_{ij}, b_i\in C^{\alpha}(\overline{G}), h, h_y\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),$$

выполнены условия симметрии

$$a(y,x)=a(-y,x), c(y,x)=c(-y,x).$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$h_r(y,x)(h_r)_y(y,x)\ge 0, (y,x)\in\Omega,$$

то задача (9) не может иметь двух различных решений тогда и только тогда когда носитель функции $h(0,x)$ совпадает с $\bar{G}$.

Аналогично предыдущим построениям рассмотрим задачу определения коэффициента в области удовлетворяющей условию (C), т.е. задачу определения пары функций $(u,f)\in U_2(\Omega)\times F(\bar{G})$ из условий:

$$\begin{gathered}-(M_2u)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\\ (y,x)\in\Omega,\quad u(y,x)=\nu(y,x),\\ (y,x)\in\partial\Omega,\quad u(0,x)=\chi(x), x\in\bar{G}.\end{gathered}\tag{10}$$

Теорема 8. Пусть область Ω удовлетворяет условию (C),

$$a,c,a_y,\quad c_y\in C^\alpha(\bar{\Omega}_-), a_{ij},b_i\in C^\alpha(\bar{G}), g,g_y\in C^\alpha(\bar{\Omega}),\nu\in C^{2,\alpha}(\partial\Omega),\quad \nu(y,x)=0,$$
$$(y,x)\in\partial\Omega, |y|>q,$$

выполнены условия симметрии

$$a(y,x)=a(-y,x),\quad c(y,x)=c(-y,x),$$

выполнены неравенства

$$c(y,x)\le 0, c_y(y,x)\ge 0,\quad (y,x)\in\Omega_-,$$

Тогда, если справедливы неравенства

$$\nu_r(y,x)\ge 0, (\nu_r)_y(y,x)\ge 0, (y,x)\in\partial\Omega, g_r(y,x)\ge 0, (g_r)_y(y,x)\ge 0, (y,x)\in\Omega_-$$

и хотя бы одна из функций ν_r, g_r отлична от тождественного ноля, то не может существовать двух различных решений задача (10).

Рассмотрим аналог обратной задачи (10) с переопределением на границе. Будем говорить, что область $\Omega_-\subset R^{n+1}$ удовлетворяет условию (C_1), если:
1)существуют числа $q,q_1: 0<q<q_1$, такие, что для цилиндров

$$Q_1(q)=(-q,0)\times G,$$

справедливо включение

$$Q_1(q) \subset \Omega_- \subset Q_1(q_1),$$

2)существует функция $\mu \in C(\bar{G})$ такая, что справедливо равенство

$$\Omega_- = \{(y,x) \in R^{n+1} : x \in G, -\mu(x) < y < 0\},$$

3)часть границы области Ω_- при $y \le 0,$ многообразие

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_- \setminus \{(y,x) : y = 0, x \in G\}$$

является гладким класса $C^{2,\alpha}$.

В области Ω_- удовлетворяющей $(C_1),$ рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f) \in U_2(\Omega_-) \times F(\bar{G})$ из условий:

$$\begin{gathered} -(M_2 u)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), \\ (y,x) \in \Omega_-, \quad u(y,x) = \nu(y,x), \\ (y,x) \in \Gamma_1, \quad u_y(0,x) = 0, u(0,x) = \chi(x), x \in \bar{G}. \end{gathered} \tag{11}$$

Теорема 9. Пусть область Ω_- удовлетворяет условию (C_1),

$$a, c, a_y, c_y \in C^\alpha(\bar{\Omega}_-), a_{ij}, b_i \in C^\alpha(\bar{G}), g, g_y \in C^\alpha(\bar{\Omega}_-), \nu \in C^{2,\alpha}(\Gamma_1),$$

$$\nu(y,x) = 0, (y,x) \in \Gamma_1, |\, y \,|> q,$$

выполнены условия симметрии

$$a(y,x) = a(-y,x), c(y,x) = c(-y,x),$$

выполнены неравенства

$$c(y,x) \le 0, c_y(y,x) \ge 0, (y,x) \in \Omega_-,$$

Тогда, если выполнены неравенства

$$\nu(y,x) \ge 0, \nu_y(y,x) \ge 0, (y,x) \in \partial\Omega, g(y,x) \ge 0, g_y(y,x) \ge 0, (y,x) \in \Omega_-$$

и хотя бы одна из функций ν, g отлична от тождественного ноля, то не может существовать двух различных решений задача (11).

Переходя к вопросу о существовании решения обратной задачи (3)-(4) напомним, что если задана вещественнозначная функция $g(y)$,то, как обычно,

$$g^+(y) = \max\{g(y),0\}, g^-(y) = |g(y)| - g^+(y).$$

Для формулировки теоремы существования для задачи (3)-(4) определим вспомогательную функцию $\overline{w}(y,x), \overline{w} \in U(\Omega),$ как решение следующей краевой задачи:

$$-(M_1\overline{w})(y,x) = (g_{yy})^-(y,x),(y,x) \in \Omega,$$

$$\overline{w}(y,x) = (\nu_{yy})^-(y,x),(y,x) \in \Gamma, \overline{w}(q_i,x) = g^+(q_i,x)/a(q_i,x), x \in \partial G.$$

Для задачи (3)-(4) в цилиндре

$$\Omega = (q_1,q_2) \times G \subset R^{n+1}$$

справедлива следующая теорема существования.

Теорема 10. Пусть справедливы включения:

$$a_{ij}, b_i, c, f \in C^\alpha \cap C(\overline{G}),\ a, a_{yy}, g, g_{yy} \in C^\alpha(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ \nu, \nu_{yy} \in C(\Gamma),$$

выполнены неравенства

$$c(x) + a_{yy}(y,x) \le 0,(y,x) \in \Omega$$

и условия согласования

$$\nu(q_i,x) = 0, -a(q_i,x)\nu_{yy} = g(q_i,x), x \in \partial G.$$

Тогда для любой функции

$$\chi \in H(G) = \{\chi \in C(\overline{G}) : \chi \in C^{2,\alpha}(G),(L\chi) \in C(\overline{G})\},$$

удовлетворяющей условиям согласования

$$\chi(x) = \nu(0,x), x \in \partial G,$$

условию

$$\chi(x) \ge \chi_0 > 0, x \in G$$

и неравенству

$$a(0,x)\overline{w}(0,x) - ((L\chi)(x) + g(0,x)) \le 0, x \in G,$$

существует решение обратной задачи (3)-(4).

Следствие. Пусть дополнительно к условиям теоремы 10 выполнены условия

$$g(y,x)\geq 0, g_{yy}(y,x)\leq 0, \nu(y,x)\geq 0, \nu_{yy}(y,x)\leq 0.$$

Тогда задача (3)-(4) имеет и притом единственное решение в указанном классе функций.

В качестве приложения теоремы 10 рассмотрим вопрос о существовании решения обратной задачи определения коэффициента с переопределением на границе. Пусть требуется определить пару функций $(u,f)\in U_1(\Omega\_)\times F(G)$ из условий:

$$\begin{gathered} -(Mu)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x), \\ (y,x)\in\Omega_-,\quad u(y,x)=\nu(y,x), \\ (y,x)\in\Gamma_-,\quad u_y(0,x)=0, u(-q,x)=0, u(0,x)=\chi(x), x\in\bar{G}. \end{gathered} \tag{12}$$

Для формулировки теоремы существования задачи (12) продолжим чётным образом по y в цилиндр

$$\bar{\Omega}_1=[-q,q]\times\bar{G}$$

функции a,g,ν и в цилиндре $\bar{\Omega}_1$ рассмотрим краевую задачу определения функции $\bar{w}\in U(\Omega_1)$ из условий:

$$\begin{gathered} -(\tilde{M}_1\bar{w})(y,x)=(\tilde{g}_{yy})^-(y,x),(y,x)\in\Omega_1,\quad \bar{w}(y,x)=(\tilde{\nu}_{yy})^-(y,x), \\ (y,x)\in\Gamma_1=[-q,q]\times\partial G, \bar{w}(\pm q,x)=\tilde{g}^+(\pm q,x)/\tilde{a}(\pm q,x), x\in G. \end{gathered} \tag{13}$$

В условиях (13) функции с тильдой суть продолжения по y в цилиндр $\bar{\Omega}_1$ с цилиндра $\bar{\Omega}$ чётным образом соответствующих функций заданных в цилиндре $\bar{\Omega}$, $\tilde{M}_1$ получившийся при таком продолжении оператор . Для задачи (12) справедлива следующая теорема существования.

Теорема 11. Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i, c\in C^\alpha\cap C(\bar{G}),\ a,\ a_{yy}, g, g_{yy}\in C^\alpha(\Omega_-)\cap C(\bar{\Omega}_-),\ \nu,\nu_{yy}\in C(\Gamma_-),$$

выполнено неравенство

$$c(x)+a_{yy}(y,x)\leq 0,(y,x)\in\Omega$$

условия согласования

$$\nu(q_i,x)=0,\ \ -a(q_i,x)\nu_{yy}(q,x)=g(q_i,x),\nu_y(0,x)=0,x\in\partial G$$

и условия

$$a_y(0,x)=0,\quad a_y(0,x)=0,g_y(0,x)=0,x\in\overline{G}.$$

Тогда для любой функции $\chi\in H(G)$, удовлетворяющей условию согласования:

$$\chi(x)=\nu(0,x),x\in\partial G,$$

и неравенствам

$$a(0,x)\overline{w}(0,x)-((L\chi)(x)+g(0,x))\le 0\quad \chi(x)\ge\chi_0>0,x\in G,$$

существует решение обратной задачи (12).

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 11 и, кроме этого, выполнены неравенства

$$g(y,x)\ge 0,g_{yy}(y,x)\le 0,\nu(y,x)\ge 0,\nu_{yy}(y,x)\le 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи (12).

Замечание. Приведённые выше условия существования и единственности решения обратной задачи (3)-(4) содержат довольно много ограничений на заданные функции. Приведём простой пример показывающий, что все эти условия могут быть легко удовлетворены. Пусть

$$\varphi(x)=0,x\in G,\mu(x,t)=t,g(x,t)=t+1,Lu=\Delta u.$$

Тогда получим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega)\times F(G)$ из условий:

$$u_t(x,t)=(\Delta u)(x,t)+f(x)u(x,t)+t+1,(x,t)\in\Omega_T,$$

$$u(x,0)=0,x\in\overline{G},u(x,t)=t,(x,t)\in\Gamma_T,u(x,T)=\chi(x),x\in\overline{G}. \tag{14}$$

Для функции $\overline{v}(x,t)$ из условий (5) получаем задачу:

$$\overline{v}_t(x,t)=(\Delta\overline{v})(x,t)+1,(x,t)\in\Omega_T,\quad \overline{v}(x,0)=1,x\in\overline{G},\overline{v}(x,t)=1,(x,t)\in\Gamma_T.$$

Тогда для функции χ из теоремы 2 получаем условия

$$\chi(x)\ge\chi_0>0,\overline{v}(x,T)-\Delta\chi(x)-(T+1)\le 0.$$

В силу очевидной оценки

$$\overline{v}(x,T)\le T+1,$$

следующей для $\overline{v}(x,t)$ из принципа максимума, из второго неравенства получаем оценку:

$$\Delta\chi(x) \ge 0, x \in G.$$

Таким образом получаем, что для существования единственного решения обратной задачи (14) достаточно чтобы функция χ удовлетворяла условиям:

$$\Delta\chi(x) \ge 0, x \in G, \chi(x) = 1, x \in \partial G, \chi(x) \ge \chi_0 > 0, x \in G.$$

Этим условиям удовлетворяет, например, гармоническая в G функция. Из приведённого примера видно, что множество функций удовлетворяющих условиям теорем существования и единственности достаточно велико.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Гилбарг, Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М: Наука,1989.
2. *Соловьёв, В.В.* Обратная задача определения коэффициента в уравнении Пуассона в цилиндре //ЖВМ и МФ,2011,т.51.№10,с.1-8.
3. *Прилепко, А.И.* Избранные вопросы в обратных задачах математической физики //Условно-корректные задачи матем. физики и анализа. Новосибирск: Наука.1992.С.151-162.

DESIDABILITY OF INVERSE PROBLEMS FOR THE ELLIPTIC EQUATION IN THE CYLINDER

V. Soloviev

National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. In this paper the inverse problems for the elliptic equation in the bounded domain are considered. Two options for introducing additional information for the direct problems are investigated. In the first case additional information is given inside the definition domain of the solution for the direct problem, in second one – on the boundary of the domain. The existence and uniqueness theorems are formulated for both cases. The examples for inverse problems are detailed.

Key words: inverse problems, elliptic equation, overdetermination.