Keywords: universal algebra, quasigroup, projective geometry.

УДК 517.5

СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ С ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ В КЛАССАХ ОРЛИЧА

З.Н. Цукарева

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. В настоящей работе рассматривается поведение прямоугольных частичных сумм $S_n(x;f)$, $x \in \mathrm{T}^N = [-\pi,\pi]^N$, $n = (n_1,...,n_N) \in \mathbb{Z}^N$, кратного тригонометрического ряда Фурье функций *f* из классов Орлича $\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ (где неубывающая функция $\Phi:[0,\infty) \to [0,\infty)$, $\Phi(u) = \overset{=}{o}(u \ln^+ \ln^+ u)$ при $u \to \infty$) в случае, когда некоторые из компонент n_j вектора n являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей.

Ключевые слова: кратные ряды Фурье, слабая обобщенная локализация, множества сходимости и расходимости, классы Орлича, лакунарная последовательность.

Рассмотрим *N*-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1,...,x_N)$, и положим $(yx) = y_1x_1 + \cdots + y_Nx_N$. Введем множества: $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами и $\mathbb{Z}_1^N = \{(n_1,\ldots,n_N) \in \mathbb{Z}^N :$ $n_j \geq 1,\ j = 1,...,N\}$.

Пусть Φ: [0, ∞) → [0, ∞) − неубывающая функция. Через $\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ обозначим множество суммируемых на $\mathrm{T}^N = [-\pi,\pi]^N$ функций f таких, что

$$\int_{\mathrm{T}^N} \Phi(|f(x)|)dx < \infty.$$

Если $\Phi(u) = u^p$, $p \geq 1$, то обозначим $\Phi(L) = L_p(\mathrm{T}^N)$, если $\Phi(u) = u\log^+ u$, где $\log^+ u = \log\max\{1,u\}$, то $\Phi(L) = L\log^+ L$.

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in \Phi(L)(\mathrm{T}^N)$, $N \geq 1$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}$$

Для любого вектора $n=(n_1,\ldots,n_N)\in\mathbb{Z}_1^N$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x;f)=\sum_{|k_1|\le n_1}\cdots\sum_{|k_N|\le n_N} c_k e^{i(k_1x_1+\cdots+k_Nx_N)}.$$

Пусть A − произвольное измеримое множество, $A\subset \mathrm{T}^N$, $\mu A>0$ ($\mu=\mu_N$ − N-мерная мера Лебега), и пусть $f(x)=0$ на A.

Введем, следуя работе И.Л. Блошанского [1], понятие слабой обобщенной локализации почти всюду для рядов Фурье.

Определение. Пусть A, $A\subset \mathrm{T}^N$, − произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса $\Phi(L)$ справедлива на множестве A слабая обобщенная локализация почти всюду (СОЛ), если для любой функции $f\in\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$, $f(x)=0$ на A, существует подмножество положительной меры A_1 множества A такое, что $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x;f)=0$ *почти всюду на* A_1.

Пусть $M=\{1,...,N\}$, $N>2$, $J_k=\{j_1,...,j_k\}\subset M$, $j_1<\ldots<j_k$, при $1\le k\le N-1$ или $J_k=\varnothing$ при $k=0$. Пусть $\lambda=\lambda(J_k)=(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_k})\in\mathbb{Z}_+^N$, $j_v\in J_k$, $v=1,...,k$. Символом $n^{(\lambda)}=n^{(\lambda)}[J_k]=(n_1,\ldots,n_N)\in\mathbb{Z}_+^N$ будем обозначать такой N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j\in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей ($n_j=n_j^{(\lambda_j)}$, $n_j^{(\lambda_j)}\to\infty$ при $\lambda_j\to\infty$ и $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)}\ge q>1$, $\lambda_j=1,2,...$).

Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_k]$ и $\mathbb{R}[M\setminus J_k]$, где $\mathbb{R}[J_k]=\{x=(x_1,...,x_N)\in\mathbb{R}^N : x_j=0$ при $j\in M\setminus J_k\}$, а $\mathbb{R}[M\setminus J_k]= =\{x=(x_1,...,x_N)\in\mathbb{R}^N$: $x_j=0$ при $j\in J_k\}$. Обозначим также $\mathrm{T}[J_k]=\{x\in\mathbb{R}[J_k]:\ -\pi\le x_j\le\pi$ при $j\in J_k\}$ и $\mathrm{T}[M\setminus J_k]=\{x\in\mathbb{R}[M\setminus J_k]:\ -\pi\le x_j\le\pi$ при $j\in M\setminus J_k\}$.

Далее, пусть $\Omega\subset\mathrm{T}^N$ − произвольное (непустое) открытое множество. Положим $W[J_s]=\Omega[J_s]\times\mathrm{T}[M\setminus J_s]$, $s=1,2$, где $\Omega[J_s]=pr_{(J_s)}\{\Omega\}$ − ортогональная проекция множества Ω на пространство $\mathbb{R}[J_s]$. (При этом любой вектор $z=(z_1,...,z_{2N})\in\Omega[J_s]\times\mathrm{T}[M\setminus J_s]$ мы отождествляем с вектором $x=(x_1,...,x_N)\in\mathbb{R}^N$ по формуле: $x_m=z_m$ при $m\in J_s$ и $x_m=z_{N+m}$ при $m\in M\setminus J_s$). Следуя терминологии работы И.Л. Блошанского [2] множества $W[J_1]$ будем называть "N-мерными плоскостями", а $W[J_2]$ − "N-мерными брусками". Далее для любого J_k, $0\le k\le N-1$, рассмотрим следующие множества: множество

$$W_s=W_s(J_k)=\bigcup_{J_s\subset M\setminus J_k}W[J_s] \qquad (1)$$

(которое при s = 1 будем называть "полным крестом из N-мерных плоскостей", если $J_k = \varnothing$, и "неполным крестом из N-мерных плоскостей", если $J_k \neq \varnothing$, а при s = 2 − "полным крестом из N-мерных брусков", если $J_k = \varnothing$, и "неполным крестом из N-мерных брусков", если $J_k \neq \varnothing$) и множество

$$W_s^0 = W_s^0(J_k) = \bigcap_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s] \ ,$$

(которое будем называть "центром" соответствующего "N-мерного креста") (см. терминологию, используемую в работах И.Л. Блошанского и О.В. Лифанцевой [3, 4]).

Как известно (см. [2]), "самыми простыми" множествами, на которых справедлива СОЛ для суммируемых по прямоугольникам кратных рядов Фурье функций $f \in L_p(\mathrm{T}^N)$, являются "полные N-мерные брусочные кресты" $W_2(J_0)$ при $p > 1$, $N \geq 2$, и "полные N-мерные плоскостные кресты" $W_1(J_0)$ в случае $p = 1$, $N \geq 1$.

В то же время, если частичные суммы $S_n(x; f)$ ряда Фурье имеют "номер" $n = n^{(\lambda)}[J_k]$ ($N \geq 3$, $1 \leq k \leq N-2$), в котором k компонент n_j, $j \in J_k$, являются элементами лакунарных последовательностей, а остальные $N-k$ компонент n_j, $j \in M \setminus J_k$, − "свободны" (такие частичные суммы $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$, следуя работам И.Л. Блошанского и О.В. Лифанцевой [3, 4], называются "J_k-лакунарными"), то в классах $L_p(\mathrm{T}^N)$, $p > 1$, заметно меняется геометрия множеств, на которых справедлива СОЛ. А именно, "самыми простыми" множествами, на которых справедлива СОЛ для кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм" функций $f \in L_p(\mathrm{T}^N)$ при $p > 1$ и $N \geq 3$ будут уже "неполные N-мерные брусочные кресты" $W_2(J_k)$. Заметим, что в классе $L_1(\mathrm{T}^N)$ аналогичный результат не справедлив (см. [4]).

Что касается классов Орлича, то О.К. Ивановой в [5] было установлено, что "самыми простыми" множествами, на которых справедлива СОЛ для кратных рядов Фурье функций $f \in \Phi(L)(\mathrm{T}^N)$, $N \geq 1$ (где $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ и $\Phi(u) = \overset{=}{o}(u \ln^+ \ln^+ u)$ при $u \to \infty$), остаются "полные N-мерные плоскостные кресты" $W_1(J_0)$. Нами установлено, что "лакунарность" последовательности частичных сумм не позволяет для данного класса изменить геометрию этих крестов, а именно, справедлива следующая теорема (см. также [6]).

Теорема. Пусть $N \geq 2$ и $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-1$, тогда существуют множество $W_1 = W_1(J_k)$ (вида (1)) и функция $f \in \Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ (где $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ и $\Phi(u) = \overset{=}{o}(u \ln^+ \ln^+ u)$ при $u \to \infty$) такие, что $f(x) = 0$ на W_1, но "J_k-лакунарная последовательность частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ неограниченно расходится почти всюду на T^N при $\lambda_j \to \infty$, $j \in J_k$, $n_j \to \infty$, $j \in M \setminus J_k$.

Доказательство теоремы. Фиксируем произвольное k, $1 \leq k \leq N-1$, $N \geq 2$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N-k+1, ..., N\}$, соответственно,

$M \setminus J_k = \{1,..., N-k\}$. Пусть $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1,\dots,n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ − N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ − элементы некоторых (однократных) лакунарных последовательностей ($n_j = n_j^{(\lambda_j)}, n_j^{(\lambda_j)} \to \infty$ при $\lambda_j \to \infty$ и $n_j^{(\lambda_j+1)} / n_j^{(\lambda_j)} \ge q > 1$, $\lambda_j = 1, 2,...,$ $j = N-k+1,..., N$).

Фиксируем произвольные a, b, $-\pi < a < b < \pi$, и в качестве "неполного креста из N-мерных плоскостей" возьмем множество

$$W_1 = \bigcup_{J_1 \subset M \setminus J_k} W[J_1], \tag{2}$$

где $W[J_1] = \Omega[J_1] \times \mathrm{T}[M \setminus J_1] = (a,b) \times [-\pi, \pi]^{N-1}$.

Определим функцию F следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} g(x_1)...g(x_{N-1}) f(x_N), & \text{если } k = 1, \\ g(x_1)...g(x_{N-k}) \psi(x_{N-k+1},..., x_{N-1}) f(x_N), & \text{если } k > 1, \end{cases}$$

где $g(x_l) \in C(\mathrm{T}^1)$, $l = 1,..., N-k$, причем $g(x_l) = 0$ при $x_l \in (a,b)$ и $g(x_l) \ne 0$ при $x_l \in \mathrm{T}^1 \setminus (a,b)$, $\psi(x_{N-k+1},..., x_{N-1}) \equiv 1$ при $(x_{N-k+1},..., x_{N-1}) \in \mathrm{T}^{k-1}$, и, наконец, $f(x_N)$, $f \in \Phi(L)(\mathrm{T}^1)$, где $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ и $\Phi(u) = \overset{=}{o}(u \ln^+ \ln^+ u)$ при $u \to \infty$, − функция, построенная С.В. Конягиным в [7], для которой подпоследовательность частичных сумм $S_{n_N^{(\lambda_N)}}(x_N; f)$ неограниченно расходится почти всюду (п.в.) на T^1.

Получаем, что, во-первых, так определенная функция $F \in \Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ и, во-вторых, $F(x) = 0$ при $x \in W_1$.

Для доказательства последнего достаточно заметить, что для любой "N-мерной плоскости" $W[J_1]$, $J_1 \subset M \setminus J_k$, найдутся непрерывные функции $g(x_l)$, $l = 1,..., N-k$, которые "обнулят" функцию $F(x)$ на этой "N-мерной плоскости", т.е. на множестве $W[J_1]$. А так как функция $F(x) = 0$ на каждой из "N-мерных плоскостей" $W[J_1]$, входящей в состав "N-мерного креста" W_1 − (2), то $F(x) = 0$ на всем множестве W_1.

В то же время, очевидно,

$$S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; F) = \prod_{l=1}^{N-k} S_{n_l}(x_l; g(x_l)) \cdot S_{n_N^{(\lambda_N)}}(x_N; f)$$

Так как функции $g(x_l) \ne 0$ при $x_l \in \mathrm{T}^1 \setminus (a,b)$, $S_{n_l}(x_l; g(x_l))$, $l = 1,..., N-k$, − тригонометрические полиномы, то $S_{n_l}(x_l; g(x_l)) \ne 0$, начиная с некоторого номера и для п.в. $x_l \in [-\pi, \pi]$, $l = 1,..., N-k$. Получаем, что если $n_N^{(\lambda_N)}$ растет достаточно быстро, то "J_k-лакунарная последовательность частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}}(x; F)$ неограниченно расходится для п.в. $x \in \mathrm{T}^N$ при $\lambda_j \to \infty$, $j \in J_k$, $n_j \to \infty$, $j \in M \setminus J_k$.

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И.Л. Блошанскому за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блошанский, И.Л.* О критериях слабой обобщенной локализации в N-мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. №6. С. 1294-1298.
2. *Блошанский, И.Л. Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p, $p>1$* // Изв. АН СССР. Серия матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 243-282.
3. *Блошанский, И.Л., Лифанцева О.В.* Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольный частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности // ДАН России. 2008. Т. 423. № 4. С. 439-442.
4. *Блошанский, И.Л., Лифанцева О.В.* О локализации для кратных рядов Фурье с лакунарной последовательностью частичных сумм в классе L_1 // Материалы 15-й зимней математической школы в Саратове. Саратов. 2010. С. 29-30.
5. *Иванова О.К.* Слабая обобщенная локализация в пространствах Орлича // Дисс. ...канд. физ.-матем. наук: М., 1999.
6. *Tsukareva, Z. Bloshanskii I., Lifantseva O.*. On localization for multiple Fourier series with lacunary sequences of partial sums in Orlicz spaces // The 8-th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computations. M., PFUR, 2011. P. 399-400.
7. *Конягин, С.В.* О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье // Труды института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. №2. С. 112-119.

WEAK GENERALIZED LOCALIZATION FOR MULTIPLE FOURIER SERIES WITH LACUNARY SEQUENCES OF PARTIAL SUMS IN ORLICZ SPACES

Z.N. Tsukareva

Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005 Russia

Abstract. In the present paper we consider behavior of rectangular partial sums $S_n(x;f)$, $x \in \mathrm{T}^N = [-\pi,\pi]^N$, $n=(n_1,...,n_N) \in \mathbb{Z}^N$, of multiple trigonometric Fourier series of functions f in Orlicz spaces $\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ (where non-decreasing function $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\Phi(u) \overset{=}{o}(u\ln^+\ln^+ u)$ as $u\to\infty$) in the case, when some components n_j of vector n are elements of some (singular) lacunary sequences.

Key words: multiple Fourier series, weak generalized localization, sets of convergence and divergence, Orlicz spaces, lacunary sequence.