АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

О.А. Матвеев, Р.М. Солдатенков

*Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, д.10а*

Аннотация. Вводится в рассмотрение алгебраическая аксиоматика проективной прямой над полем действительных чисел. Проективная прямая рассматривается как универсальная алгебра с двупараметрическим семейством тернарных операций, связанных определёнными тождествами. В построенной модели проективной прямой выводятся формулы преобразования координат.
Ключевые слова: универсальная алгебра, квазигруппа, проективная геометрия.

Общепризнанны роль и место теории групп и алгебр Ли в геометрии (достаточно упомянуть Эрлангенскую программу Феликса Клейна) математике, теоретической механике, физике, химии, вообще в естествознании. Однако, как нам представляется, верхний слой в этом направлении уже снят, и на передний план выходят обобщения понятия группы, приобретает актуальность теория гладких квазигрупп. В квазигруппе, вообще говоря, нарушается тождество ассоциативности. По определению квазигруппа не обязана иметь нейтрал, однако главный левый изотоп двусторонней квазигруппы уже имеет единичный элемент, то есть является лупой. Аналитическая лупа имеет касательную алгебру, вообще говоря, со счетным числом операций конечной арности, подчиняющихся счетному числу тождеств, обобщающих тождество Якоби алгебры Ли, которое на самом деле, если выполняется, гарантирует ассоциативность групповой бинарной операции.

Проективная геометрия над полем действительных чисел традиционно глубоко изучается в педагогических высших учебных заведениях. Эта тематика подробно отражена в научной и учебной литературе. [1]-[7]. Неконструктивность аксиоматики Германа Вейля проективного пространства вызывает трудность восприятия у вдумчивых студентов. На лекционных и семинарских занятиях приходится долго разбирать модели проективной прямой и проективной плоскости, вводить понятие проективного репера, изучать свойства сложного отношения четырех точек, лежащих на проективной прямой и так далее. Все эти трудности могут быть хотя бы частично обойдены, но для этого необходимо немного освоиться с теорией универсальных алгебр и, в частности, с понятием квазигруппы.

В настоящей работе мы дадим лишь эскиз идеи построения проективной геометрии на примере размерности 1, используя теорию квазигрупп.

Ясно, что конструкция имеет смысл над произвольным полем и легко переносится на случай проективной геометрии над телом.

1. Модель проективной прямой

Определение 1. Пусть S – действительная окружность, на которой рассмотрим семейство частичных тернарных операций $\omega_\tau : S^3 \to S$, «занумерованных» символами $\tau \in \boldsymbol{R^2} \setminus \{0{,}0\} = \boldsymbol{R^2_*}$, $\tau = (t,u)$, $t \in \boldsymbol{R}$, $u \in \boldsymbol{R}$,

$$\omega_\tau(a,b,c) = d;\ a,b,c,d \in S,\ a \neq b,\ \omega_\tau(a,b,c) = (\tau; a,b,c) = (t,u;a,b,c) = d,$$

причем операции ω_τ обладают следующими свойствами:

$$(v \cdot t, v \cdot u;\ a,b,c) = (t,u;a,b,c).\ v \neq 0; \tag{1}$$

$$(v,w;\ a,b,(t,u;a,b,c)) = (v \cdot t, w \cdot u;\ a,b,c); \tag{2}$$

$$(t,v;\ a,b,c) = (v - t.v;\ a,b,c); \tag{3}$$

$$(1,1;\ a,b,c) = c; \tag{4}$$

$$(1,0;\ a,b,c) = a; \tag{5}$$

где $a,d,c \in S;\ a \neq b,\ t,u,v,w \in \boldsymbol{R}$.

Частичную алгебру $\boldsymbol{P^1} = \left\langle S, (\omega_\tau)_{\tau \in \boldsymbol{R^2_*}} \right\rangle$ называем действительной проективной прямой.

Замечание. Алгебра $\boldsymbol{P^1}$ является частичной, поскольку операция $(t,u;a,b,c)$ не определена, если $a = b$.

Предложение 1. На проективной прямой $\boldsymbol{P}^1$ выполняются следующие тождества:

$$(t,v;\ a,b,a) = a; \tag{6}$$

$$(0,1;\ a,b,c) = b; \tag{7}$$

$$(t,v;\ a,b,b) = b,\ v \neq 0. \tag{8}$$

Доказательство. Полагая в тождестве (2) $u = 0$, получаем, используя тождества (1) и (5):

$$(v,w;\ a,b,(t,0;\ a,b,c)) = (v \cdot t, 0;\ a,b,c) = a.$$

Далее, воспользовавшись тождеством (5), имеем для любых неравных между собой точек a и b на S

$$(v,w)\in \boldsymbol{R}^2_*,\ (v,w;\,a,b,a)=a.$$

Докажем тождество (7). Последовательно используя тождества (4) и (3), имеем:

$$c=(1,1;\,a,b,c)=(0,1;\,a,c,b).$$

Меняя местами точки b и c, приходим к тождеству (7). Затем, подставляя в тождество (2) $t=0,\ u=1,$ получим:

$$(v,w;\,a,b,(0,1;\,a,b,c))=(0,w;\,a,b,c).$$

Используя (7) и (1), получаем для $w\neq 0$:

$$(v,w;\,a,b,b)=b.$$

Предложение 2. На проективной прямой $\boldsymbol{P}^1$ зафиксируем произвольную точку α и два действительных числа t, u, отличных от 0, $\tau=(t,u),\ \tau\neq(1,1).$ На $\boldsymbol{P}^1\setminus\{a\}\cong\boldsymbol{R}$ рассмотрим бинарную операцию:

$$b\underset{(\tau;a)}{\cdot}c=b\underset{(t,u;a)}{\cdot}c=(t,u;a,b,c)=(\tau;\,a,b,c). \qquad (9)$$

Тогда $\left\langle \boldsymbol{P}^1\setminus\{a\},\underset{(\tau;a)}{\cdot}\right\rangle$ является двусторонней идемпотентной эластичной квазигруппой, изотопной абелевой группе по сложению <***R***, + >.

Определение 2. Отображение $(t,u)\theta_b^a : S\to S,\ a\neq b,\ t\neq 0,\ u\neq 0,$ $(t,u)\theta_b^a c=(t,u;\,a,b,c)$ называется гиперболическим преобразованием с неподвижными точками a и b.

Определение 3. Если $d=(t,u;\,a,b,c),\ u\neq 0,$ то число $\dfrac{t}{u}$ называется сложным отношением четверки точек $a, b, c, d,$ т.е.

$$\frac{t}{u}=(a,b,c,d). \qquad (10)$$

Определение 4. Любые три попарно различные точки a, b, c на S называются репером, и если $d = (t, u;\, a, b, c)$, то точка d в репере $R = (a, b, c)$ имеет две координаты (t, u).

Определение 5. Четверка точек $a, b, c, d = (-1, 1;\, a, b, c)$ называется гармонической.

Определение 6. Изоморфизм алгебры $\boldsymbol{P}^1$ называется проективным преобразованием проективной прямой.

Немедленно проверяется, что проективное преобразование сохраняет сложное отношение четырех точек, переводит репер в репер, и выполняется правило равенства координат, т.е. прообраз точки в первом репере имеет те же координаты, что и образ во втором репере, если второй репер является образом первого.

На евклидовой плоскости рассмотрим окружность S единичного радиуса, которая в декартовой системе координат задается уравнением $x^2+(y-1)^2=1$. Ясно, что существует биекция $(-\pi,\pi]\to S$, $x=\cos\alpha$, $y=1+\sin\alpha$, α – угловой параметр, $\alpha\in(-\pi,\pi]$. Для $\tau=(t,u)\in\boldsymbol{R}^2_*$ зададим тернарную операцию на S следующими формулами:

$$\alpha_4=2arctg\frac{t\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin(\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2})+u\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2})}{t\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin(\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2})+u\cos\frac{\alpha_2}{2}\sin(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2})},\tag{11}$$

где $a(\alpha_1), b(\alpha_2), c(\alpha_3), d(\alpha_4)\in S, \quad d=(t,u;\,a,b,c).$

Для введенной операции тождества (1) – (5) определения 1 непосредственно проверяются.

2. Формулы преобразования координат на проективной прямой

Пусть точка x в репере $R_{a,b,c}=\{a,b,c\}$ имеет следующие координаты $x=(t,u;a,b,c)$. Допустим, что мы имеем репер $R_{k,l,m}$, причем $k=(t_1,u_1;a,b,c)$, $l=(t_2,u_2;a,b,c)$, $m=(t_3,u_3;a,b,c)$ и $x=(t_0,u_0;k,l,m)$. Найдем выражение t и u через t_i, u_i.

Для начала получим из аксиом некоторые следствия:

1.1. $(t,u;a,b,(v,w;a,b,c))=(tv,uw;a,b,c)$

1.2. $(t,u;a,(v,w;a,b,c),c)=(tw+uv-tv,uw;a,b,c)$

1.3. $(t,u;(v,w;a,b,c),b,c)=(tv,uv+tw-uw;a,b,c)$

Если $a=(t,u;x,y,z)$, то

2.1. $x=(u-t,u;a,y,z)$

2.2. $y=(t,t-u;x,a,z)$

2.3. $z=(u,t;x,y,a)$

Доказательство этих следствий очевидно.

1 этап. Рассмотрим переход от одного репера к другому: $R_{a,b,c}\to R_{a,b,m}$.

Тогда из равенства 2.3 имеем:

$$c=(u_3,t_3;a,b,m),$$

а из равенства 1.1 получаем:

$$x=(t,u;a,b,(u_3,t_3;a,b,m))=(tu_3,ut_3;a,b,m).$$

Аналогично получаем:

$$k=\left(t_1u_3,u_1t_3;a,b,m\right),\ l=\left(t_2u_3,u_2t_3;a,b,m\right)$$

2 этап. Рассмотрим совместно следующие два репера: $R_{a,b,m}\to R_{a,l,m}$.
Тогда из равенства 2.2 $\Rightarrow$ $b=\left(t_2u_3,t_2u_3-u_2t_3;a,l,m\right)$.

Тогда из равенства 1.2 $\Rightarrow$ $$\begin{cases} x=\left(tu_3,ut_3;a,\left(t_2u_3-u_2t_3;a,l,m\right),m\right)= \\ =\left(tu_3\left(t_2u_3-u_2t_3\right)+ut_3t_2u_3-tu_3t_2u_3,ut_3\left(t_2u_3-u_2t_3\right);a,l,m\right)= \\ =\left(ut_3t_2u_3-tu_3u_2t_3,ut_3t_2u_3-ut_3u_2t_3;a,l,m\right)= \\ =\left(ut_2u_3-tu_3u_2,ut_2u_3-uu_2t_3;a,l,m\right) \end{cases}$$

Аналогично получаем:

$$k=\left(u_1t_2u_3-t_1u_3u_2,u_1t_2u_3-u_1u_2t_3;a,l,m\right)\ .$$

3 этап. $R_{a,l,m}\to R_{k,l,m}$
Равенство 2.2 влечет за собой:

$$a=\left(t_1u_3u_2-u_1t_3u_2,u_1t_2u_3-u_1t_3u_2;k,l,m\right)\ .$$

Из равенства 1.3 получаем

$$\begin{cases} x=\left(ut_2u_3-tu_3u_2,ut_2u_3-ut_3u_2;\left(t_1u_3u_2-u_1t_3u_2,u_1t_2u_3-u_1t_3u_2;k,l,m\right),l,m\right)= \\ =\left(\left(ut_2u_3-tu_3u_2\right)\left(t_1u_3u_2-u_1t_3u_2\right),\left(ut_2u_3-ut_3u_2\right)\left(t_1u_3u_2-u_1t_3u_2\right)+\right. \\ \left.+\left(ut_2u_3-tu_3u_2\right)\left(u_1t_2u_3-u_1t_3u_2\right)-\left(ut_2u_3-ut_3u_2\right)\left(u_1t_2u_3-u_1t_3u_2\right);k,l,m\right)= \\ =\left(ut_2u_3t_1u_3u_2-tu_3u_2t_1u_3u_2-ut_2u_3u_1t_3u_2+tu_3u_2u_1t_3u_2,ut_2u_3t_1u_3u_2-ut_2u_3u_1t_3u_2-\right. \\ -ut_3u_2t_1u_3u_2+ut_3u_2u_1t_3u_2+ut_2u_3u_1t_2u_3-ut_2u_3u_1t_3u_2-tu_3u_2u_1t_2u_3+tu_3u_2u_1t_3u_2- \\ \left.-ut_2u_3u_1t_2u_3+ut_2u_3u_1t_3u_2+ut_3u_2u_1t_2u_3-ut_3u_2u_1t_3u_2;k,l,m\right)= \\ =\left(ut_2u_3t_1u_3u_2-tu_3u_2t_1u_3u_2-ut_2u_3u_1t_3u_2+tu_3u_2u_1t_3u_2,ut_2u_3t_1u_3u_2-ut_2u_3u_1t_3u_2-\right. \\ \left.-ut_3u_2t_1u_3u_2-tu_3u_2u_1t_2u_3+tu_3u_2u_1t_3u_2+ut_3u_2u_1t_2u_3;k,l,m\right)= \\ =\left(ut_2u_3t_1-u_3u_2t_1t-ut_2u_1t_3+tu_1t_3u_2,ut_2u_3t_1-ut_3t_1u_2-tu_1t_2u_3+tu_1t_3u_2;k,l,m\right) \end{cases}$$

Далее получаем следующие формулы:

$$\rho t_0=\left(u_1t_3-u_3t_1\right)u_2t+\left(u_3t_1-u_1t_3\right)t_2u\ ,$$
$$\rho u_0=\left(u_2t_3-u_3t_2\right)u_1t+\left(u_3t_2-u_2t_3\right)t_1u\ \ .$$

Из полученных формул легко получаем требуемое выражение t и u через t_i, u_i, где $i=0,1,2,3$. А именно:

$$\lambda t = (u_3t_2 - u_2t_3)t_1t_0 + (u_1t_3 - u_3t_1)t_2u_0 \ ,$$
$$\lambda u = (u_3t_2 - u_2t_3)u_1t_0 + (u_1t_3 - u_3t_1)u_2u_0 \ .$$

Теорема о преобразовании координат на проективной прямой: Если $x = (t,u;a,b,c)$, $k = (t_1,u_1;a,b,c)$, $l = (t_2,u_2;a,b,c)$, $m = (t_3,u_3;a,b,c)$, $x = (t_0,u_0;k,l,m)$, то $x = ((u_3t_2 - u_2t_3)t_1t_0 + (u_1t_3 - u_3t_1)t_2u_0, (u_3t_2 - u_2t_3)u_1t_0 + (u_1t_3 - u_3t_1)u_2u_0; a,b,c)$.

В заключении заметим, что конструкция легко переносится на случай проективной плоскости [13] и, вообще, на произвольную конечную размерность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артин, Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969 - 283с.
2. *Гильберт, Д., Конфессен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981 - 344с.
3. *Хартсхорн, Р.* Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970 - 160с.
4. *Буземан, Г., Келли П.* Проективная геометрия и проективные метрики. М.: Издательство иностранной литературы, 1957 - 410с.
5. *Дарбу, Г.* Принципы аналитической геометрии. Главная редакция технико-теоретической литературы. Ленинград, Москва, 1938 -375 с.
6. *Атанасян, Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Часть II. М.: Просвещение, 1987 -352с.
7. *Погорелов, А.В.* Геометрия. М.: Наука, 1983 - 288с.
8. *Белоусов, В.Д.* Элементы теории квазигрупп. Кишинев, КГУ, 1981 - 116с.
9. *Матвеев, О.А.* О многообразиях с геодезическими.// Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, с.44 - 49.
10. *Sabinin, L.V.* On flat geoodular spaces.// Webs and Quasigroups, Tver, 1992, pp.4-9.
11. *Матвеев, О.А.* Методы теории квазигрупп в проективной геометрии. //Актуальные проблемы математики и методики её преподавания. Межвузовский сборник научных трудов. Пенза, 2001, с. 58-62.
12. *Мартынюк, А.Н., Матвеев О.А., Птицына И.В.* Элементы проективной геометрии. Учебное пособие. Издательство МГОУ, М. 2010, 135 с.
13. *Матвеев, О.А., Солдатенков Р.М.* К теории квазигрупп в проективной геометрии. // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Выпуск 8.М.:Станкин 2005 с.27-31.

THE ALGEBRAIC MODEL OF THE REAL PROJECTIVE LINE

O. Matveyev, R. Soldatenkov

Moscow region state university
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The algebraic axiomatics of a projective straight line over a field of real numbers is entered into consideration. A project line is examined as universal algebra with two parameter family of the ternary operations bound by certain identities. The formulas of transformation of coordinates are concluded in the built model of project line.

Keywords: universal algebra, quasigroup, projective geometry.

УДК 517.5

СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ С ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ В КЛАССАХ ОРЛИЧА

З.Н. Цукарева

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. В настоящей работе рассматривается поведение прямоугольных частичных сумм $S_n(x;f)$, $x \in \mathrm{T}^N = [-\pi,\pi]^N$, $n = (n_1,...,n_N) \in \mathbb{Z}^N$, кратного тригонометрического ряда Фурье функций *f* из классов Орлича $\Phi\big(L\big)(\mathrm{T}^N)$ (где неубывающая функция $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\Phi(u) = \overset{=}{o}(u\ln^+\ln^+ u)$ при $u\to\infty$) в случае, когда некоторые из компонент n_j вектора n являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей.

Ключевые слова: кратные ряды Фурье, слабая обобщенная локализация, множества сходимости и расходимости, классы Орлича, лакунарная последовательность.

Рассмотрим *N*-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1,...,x_N)$, и положим $(yx) = y_1x_1 + \cdots + y_Nx_N$. Введем множества: $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами и $\mathbb{Z}^N_1 = \{(n_1,\ldots,n_N)\in\mathbb{Z}^N:$ $n_j \ge 1,\ j = 1,...,N\}$.

Пусть Φ: [0, ∞) → [0, ∞) − неубывающая функция. Через $\Phi\big(L\big)(\mathrm{T}^N)$ обозначим множество суммируемых на $\mathrm{T}^N = [-\pi,\pi]^N$ функций f таких, что

$$\int_{\mathrm{T}^N} \Phi(|f(x)|)dx < \infty.$$

Если $\Phi\big(u\big) = u^p$, $p \ge 1$, то обозначим $\Phi\big(L\big) = L_p(\mathrm{T}^N)$, если $\Phi\big(u\big) = u\log^+ u$, где $\log^+ u = \log\max\{1,u\}$, то $\Phi\big(L\big) = L\log^+ L$.

Пусть 2π -периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in \Phi\big(L\big)(\mathrm{T}^N)$, $N \ge 1$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}$$