МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА АССОЦИИРОВАННОГО С БИКРУГОМ ИНТЕГРАЛА

А.В. Нелаев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Продолжено начатое автором исследование обобщенно-аналитических свойств обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом.

Ключевые слова: Интеграл Коши, бикруг.

1. Введение. Продолжим начатое в [1]-[2] исследование обобщенно-аналитических свойств интеграла

$$\tilde{F}_1(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^1 d\tau\int_{T^2}\frac{\varphi(\tau,\varsigma_1,\varsigma_2)\,d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1-u_1)(\varsigma_2-z_2)}$$

в области $U^{--}=\{(z_1,z_2)\in C^2:|z_1|>1,|z_2|>1\}$.

Говоря точнее, здесь мы будем рассматривать частный случай этого интеграла - интеграл

$$F_1(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^1 \tau^{\gamma-1}d\tau\int_{T^2}\frac{\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1-u_1)(\varsigma_2-z_2)}, \tag{1}$$

где

$u_1=\tau^{\delta_1}z_1+(1-\tau^{\delta_1})z_1^0$, $\delta_1>0$, $|z_1^0|<1$, γ - любое положительное число с условием $\gamma\ge 1$.

Плотность $\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)$ - произвольная определенная на остове бикруга U^2

$$T^2=\{(\varsigma_1,\varsigma_2)\in C^2:|\varsigma_1|=1,|\varsigma_2|=1\}$$

и удовлетворяющая условию Гельдера

$$\left|\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)-\varphi(\varsigma_1^0,\varsigma_2^0)\right|<A_1\cdot\left|\varsigma_1-\varsigma_1^0\right|^{\alpha_1}+A_2\cdot\left|\varsigma_2-\varsigma_2^0\right|^{\alpha_2}$$

функция, где A_k - некоторые положительные постоянные, показатели α_k - константы с условием $0<\alpha_k\le 1$, $k=1,2$.

Понятно, что интеграл (1) образуется из интеграла $\widetilde{F}_1(z_1, z_2)$ в том случае, когда плотность последнего $\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)$ имеет вид:

$$\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) = \tau^{\gamma-1} \cdot \varphi(\varsigma_1, \varsigma_2)$$

В данной статье с помощью метода линейных дифференциальных операторов будут установлены обобщенные уравнения Коши-Римана для интеграла (1) в области

$$U^{--} = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| > 1, |z_2| > 1\}$$

и указаны некоторые их приложения в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

2. Из результатов работы [2] вытекает, что в области U^{--} интеграл (1) выражается по формуле

$$F_1(z_1, z_2) = \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} \Psi^{+-}(u_1, z_2) d\tau + \int_{\tau_0}^{1} \tau^{\gamma-1} \Psi^{--}(u_1, z_2) d\tau, \tag{2}$$

где

$$\tau_0 = \left\{ -\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \sqrt{\left(\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right)^2 + \frac{1 - |z_1^0|^2}{|z_1 - z_1^0|^2}} \right\}^{\frac{1}{\delta_1}}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T^2} \frac{\varphi(\varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)(\varsigma_2 - z_2)} = \begin{cases} \Psi^{+-}(u_1, z_2), \text{при } |u_1| < 1, \\ \Psi^{--}(u_1, z_2), \text{при } |u_1| > 1 \end{cases}$$

(попутно отметим, что интеграл (1) можно определить по формуле (2) и в области голоморфности U^{+-}, если ввести для τ_0 доопределение (по непрерывности): положить в U^{+-} $\tau_0 \equiv 1$).

Рассмотрим вопрос о нахождении дифференциального уравнения в формальных производных, которому функции, определяемые интегралом (1), удовлетворяют в области U^{--}. С этой целью мы сначала установим формулу дифференциальной интеграла (1) с соответствующим двойным интегралом типа Коши

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T^2} \frac{\varphi(\varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - z_1)(\varsigma_2 - z_2)} = \begin{cases} \Psi^{+-}(z_1, z_2), \text{при } |z_1| < 1, |z_2| > 1, \\ \Psi^{--}(z_1, z_2), \text{при } |z_1| > 1, |z_2| > 1. \end{cases}$$

Теорема 1. В области U^{--} интеграл (1) связан с интегралом типа Коши $\Psi^{--}(z_1, z_2)$ формулой

$$\gamma \cdot F_1(z_1, z_2) + \delta_1 \cdot P[F_1(z_1, z_2)] = \Psi^{--}(z_1, z_2), \tag{4}$$

где дифференциальный оператор

$$P \equiv \left(z_1 - z_1^0\right)\frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}. \tag{5}$$

Доказательство. Во-первых, представим формулу (2) в более удобном для работы с ней виде. С этой целью заменим в ней параметр τ на новый вещественный параметр t по формуле $t = \tau^{\delta_1}$. Имеем: $\tau = t^{\frac{1}{\delta_1}}$, $d\tau = \frac{1}{\delta_1} t^{\frac{1}{\delta_1}-1} dt$, $\tau^{\gamma-1} = \tau^{\delta_1\frac{\gamma-1}{\delta_1}} = t^{\frac{\gamma-1}{\delta_1}}$, при $\tau = 0$ $t = 0$, при $\tau = 1$ $t = 1$ и формула (2) принимает вид:

$$F_1(z_1, z_2) = \int_0^{t_0} t^{\frac{\gamma-1}{\delta_1}} \Psi^{+-}(u_1, z_2)\cdot \frac{1}{\delta_1}\cdot t^{\frac{1}{\delta_1}-1} dt + \int_{t_0}^{1} t^{\frac{\gamma-1}{\delta_1}} \Psi^{--}(u_1, z_2)\cdot \frac{1}{\delta_1}\cdot t^{\frac{1}{\delta_1}-1} dt,$$

или

$$F_1(z_1, z_2) = \frac{1}{\delta_1}\int_0^{t_0} t^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \Psi^{+-}(u_1, z_2) dt + \frac{1}{\delta_1}\int_{t_0}^{1} t^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \Psi^{--}(u_1, z_2) dt, \tag{6}$$

где

$$t_0 = -\operatorname{Re}\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^2 + \frac{1 - |z_0|^2}{\left|z_1 - z_1^0\right|^2}},\ u_1 = tz_1 + (1-t)z_1^0.$$

Во-вторых, выведем несколько специфических свойств оператора (5). Согласно общим правилам действия операторами такого вида на функции, имеем:

$$1)\ P\left(z_1 - z_1^0\right) = z_1 - z_1^0,\ P\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right) = \overline{z_1} - \overline{z_1^0},$$

$$P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) = P\left[\sqrt{\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)}\right] = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)}} P\left[\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\left|z_1 - z_1^0\right|^2}\left[P\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right) + \left(z_1 - z_1^0\right)\cdot P\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\left|z_1 - z_1^0\right|}\left[\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right) + \left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\right] = \frac{2\left|z_1 - z_1^0\right|^2}{2\left|z_1 - z_1^0\right|} = \left|z_1 - z_1^0\right|,$$

т.е.

$$P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) = \left|z_1 - z_1^0\right|, \tag{7}$$

$$2) P\left(\frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}\right) = \frac{P\left(z_1 - z_1^0\right)\cdot\left|z_1 - z_1^0\right| - \left(z_1 - z_1^0\right)\cdot P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right)}{\left|z_1 - z_1^0\right|^2} =$$
$$= \frac{\left(z_1 - z_1^0\right)\cdot\left|z_1 - z_1^0\right| - \left(z_1 - z_1^0\right)\cdot\left|z_1 - z_1^0\right|}{\left|z_1 - z_1^0\right|^2} \equiv 0$$

Из тождества

$$P\left(\frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}\right) \equiv 0 \tag{8}$$

и правила действия операторами на сложную функцию (цепного правила: если $f = f(g)$, где $g = g\left(z_1, \overline{z_1}\right)$, то $P(f) = f_g^{'} \cdot P(g)$) вытекает, что для любой дифференцируемой функции вида $f = f\left(\frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}\right)$

$$P(f) \equiv 0. \tag{9}$$

Например, $P\left[\arg\left(z_1 - z_1^0\right)\right] \equiv 0$. Действительно, учитывая, что $z_1 - z_1^0 = \left|z_1 - z_1^0\right| \cdot e^{i\arg\left(z_1 - z_1^0\right)}$, имеем: $\arg\left(z_1 - z_1^0\right) = \frac{1}{i}\ln\frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}$, т.е. функцию именно такого вида.

$$3)\ P\left(\frac{z_1\cdot\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right) = P\left[\frac{\left(\left(z_1 - z_1^0\right) + z_1^0\right)\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right] = P\left[\frac{\left(z_1 - z_1^0\right)\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} + \frac{z_1^0\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right] =$$
$$= P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) + z_1^0 \cdot P\left(\frac{\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right) \overset{(9)}{=} P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) \overset{(7)}{=} \left|z_1 - z_1^0\right|,$$

т.е.

$$P\left(\frac{z_1\cdot\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right) = \left|z_1 - z_1^0\right|. \tag{10}$$

В-третьих, обратимся к формуле (6) и произведем в ней замену параметра t на w согласно формуле

$$t = \frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} - \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}. \tag{11}$$

Учитывая, что

а) при $t=0$

$$w = w_1 = \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0},$$

б) при $t=t_0$

$$w = w_2 \equiv \left|z_1 - z_1^0\right| \cdot \left(t_0 + \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right) = \left|z_1 - z_1^0\right| \cdot \left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\overline{z_1^0}}{\overline{z_1} - \overline{z_1^0}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^2 + \frac{1-\left|z_1^0\right|^2}{\left|z_1 - z_1^0\right|}} + \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right\} = \left|z_1 - z_1^0\right| \cdot \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} - \frac{\overline{z_1^0}}{\overline{z_1} - \overline{z_1^0}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^2 + \frac{1-\left|z_1^0\right|^2}{\left|z_1 - z_1^0\right|}} \right\} = i \cdot \operatorname{Im}\frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} +$$

$$+ \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right)^2 + 1 - \left|z_1^0\right|^2},$$

в) при $t=1$

$$w = w_3 \equiv \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0},$$

а также принимая во внимание равенства

$$dt = \frac{dw}{\left|z_1 - z_1^0\right|} \quad \text{и} \quad u_1 = tz_1 + (1-t)z_1^0 = \left(\frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} - \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)z_1 + \left(1 - \frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} + \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)z_1^0 =$$

$$= \frac{1}{\left(z_1 - z_1^0\right)\left|z_1 - z_1^0\right|}\left[\left(w\cdot\left(z_1 - z_1^0\right) - z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|\right)z_1 + \left(\left(z_1 - z_1^0\right)\left|z_1 - z_1^0\right| - w\cdot\left(z_1 - z_1^0\right) + z_1^0\left|z_1 - z_1^0\right|\right)z_1^0\right] =$$

$$= w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|},$$

перепишем (6) в виде

$$F_1(z_1, z_2) = \frac{1}{\delta_1}\int_{w_1}^{w_2}\left(\frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} - \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{+-}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2\right)\frac{dw}{\left|z_1 - z_1^0\right|} +$$

$$+ \frac{1}{\delta_1}\int_{w_2}^{w_3}\left(\frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} - \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{--}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2\right)\frac{dw}{\left|z_1 - z_1^0\right|},$$

или, что то же,

$$\delta_1 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot F_1(z_1, z_2) = \int_{w_1}^{w_2} \left(w - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot \Psi^{+-}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) dw + $$
$$+ \int_{w_2}^{w_3} \left(w - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot \Psi^{--}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) dw, \qquad (12)$$

Применяя к обеим частям формулы (12) оператор P, согласно обобщению правила Лейбница будем иметь:

$$P\left[\delta_1 \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot F_1(z_1, z_2) \right] = \int_{w_1}^{w_2} P\left\{ \left(w - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot \Psi^{+-}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) dw \right\} +$$
$$+ P(w_2)\left(w_2 - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot \Psi^{+-}\left(w_2 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) -$$
$$- P(w_1)\left(w_1 - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot \Psi^{+-}\left(w_1 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) +$$
$$+ \int_{w_2}^{w_3} P\left\{ \left(w - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot \Psi^{--}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) dw \right\} + \qquad (13)$$
$$+ P(w_3)\left(w_3 - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot \Psi^{--}\left(w_3 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) -$$
$$- P(w_2)\left(w_2 - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot \Psi^{--}\left(w_2 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right).$$

Проведем в полученной формуле возможные упрощения. Ее левая часть, с учетом правила действия линейными дифференциальными операторами на произведение и равенства

$$P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \right) = \frac{\gamma}{\delta_1} \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1} - 1} \cdot P\left(\left|z_1 - z_1^0\right| \right) \overset{(7)}{=} \frac{\gamma}{\delta_1} \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}},$$

принимает вид

$$\delta_1 \cdot \frac{\gamma}{\delta_1} \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot F_1(z_1, z_2) + \delta_1 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot P\left[F_1(z_1, z_2) \right].$$

Обратимся к правой части. В силу свойства (9) все слагаемые в ней, кроме пятого, оказываются равными нулю ($P(w_1)\overset{(9)}{\equiv}0$, $P(w_2)\overset{(9)}{\equiv}0$). Пятое слагаемое, с учетом соотношения (10) и равенств

$$w_3-\frac{z_1^0\cdot\left|z_1-z_1^0\right|}{z_1-z_1^0}=\left|z_1-z_1^0\right|,\quad w_3\cdot\frac{z_1-z_1^0}{\left|z_1-z_1^0\right|}=z_1,$$

приводится к виду

$$\left|z_1-z_1^0\right|\cdot\left|z_1-z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1}\cdot\Psi^{--}(z_1,z_2).$$

Таким образом, формула (13) принимает вид

$$\gamma\cdot\left|z_1-z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}}\cdot F_1(z_1,z_2)+\delta_1\cdot\left|z_1-z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}}\cdot P[F_1(z_1,z_2)]=\left|z_1-z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}}\cdot\Psi^{--}(z_1,z_2)$$

что равносильно формуле (4):

$$\gamma\cdot F_1(z_1,z_2)+\delta_1\cdot P[F_1(z_1,z_2)]=\Psi^{--}(z_1,z_2).$$

Теорема доказана.

Действуя на обе части формулы (4) формальной производной $\frac{\partial}{\partial\overline{z_1}}$ и учитывая голоморфность интеграла типа Коши $\Psi^{--}(z_1,z_2)$ - т.е. выполнимость для него классических уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial\Psi^{--}(z_1,z_2)}{\partial\overline{z_1}}=0,\ \frac{\partial\Psi^{--}(z_1,z_2)}{\partial\overline{z_2}}=0, \tag{14}$$

сразу получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z_1}}\left[\gamma\cdot F_1(z_1,z_2)+\delta_1\left(z_1-z_1^0\right)\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1}+\delta_1\left(\overline{z_1}-\overline{z_1^0}\right)\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial\overline{z_1}}\right]=0, \tag{15}$$

или, что то же,

$$\delta_1\left(z_1-z_1^0\right)\frac{\partial^2F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial\overline{z_1}}+\delta_1\left(\overline{z_1}-\overline{z_1^0}\right)\frac{\partial^2F_1(z_1,z_2)}{\partial\overline{z_1}^2}+(\gamma+\delta_1)\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial\overline{z_1}}=0\,.$$

Действуя на формулу (4) оператором $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z_2}}$, аналогично получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_2}}\left[\gamma \cdot F_1(z_1,z_2)+\delta_1\left(z_1-z_1^0\right)\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1}+\delta_1\left(\overline{z_1}-\overline{z_1^0}\right)\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_1}}\right]=0. \qquad (16)$$

Сейчас, казалось бы, самое время объявить систему (15) – (16) обобщенными условиями Коши-Римана интеграла $F_1(z_1,z_2)$ в области U^{--} и, тем самым, объявленную во «Введении» задачу решенной. Но есть тут одна тонкость. Дело в том, что структура формулы (2) (особенно тот факт, что τ_0 от z_2 вообще не зависит) свидетельствует о голоморфности определяемых этой формулой функций по переменному z_2. Следовательно, справедливо и более простое, чем (16), уравнение:

$$\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_2}}=0. \qquad (17)$$

Систему двух дифференциальных уравнений (15) и (17) назовем обобщенными условиями Коши-Римана для интеграла $F_1(z_1,z_2)$. Таким образом, оказывается справедливой следующая

Теорема 2. Функции двух комплексных переменных, определяемые в области U^{--} интегралом (1), удовлетворяют в этой области обобщенным условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases}\delta_1\left(z_1-z_1^0\right)\dfrac{\partial^2 F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1 \partial \overline{z_1}}+\delta_1\left(\overline{z_1}-\overline{z_1^0}\right)\dfrac{\partial^2 F_1(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_1}^2}+\left(\gamma+\delta_1\right)\dfrac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_1}}=0,\\ \dfrac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_2}}=0.\end{cases} \qquad (18)$$

3. Установленная формула (4) связи интеграла (1) с интегралом типа Коши $\Psi^{--}(z_1,z_2)$ позволяет рассмотреть, например, следующую задачу.

Задача 1. Требуется найти решение в области U^{--} уравнения

$$\gamma \cdot f_1(z_1,z_2)+\delta_1\left(z_1-z_1^0\right)\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_1}+\delta_1\left(\overline{z_1}-\overline{z_1^0}\right)\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_1}}=\Psi^{--}(z_1,z_2) \qquad (19)$$

(где константы $\delta_1>0$, $\gamma \ge 1$), если известна его правая часть.

На основании формулы (4) заключаем, что в качестве решения уравнения (19) можно взять функцию, определяемую интегралом (1), имеющим ту же самую плотность $\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)$, что и интеграл типа Коши:

$$\Psi^{--}(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{T^2}\frac{\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1-z_1)(\varsigma_2-z_2)},$$

и те же самые константы δ_1 и γ, которые входят в (19).

Точно так же, система обобщенных условий Коши-Римана (18) дает возможность рассмотреть, например, такую задачу.

Задача 2. Требуется найти решение в области U^{--} системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\left(z_1-z_1^0\right)\dfrac{\partial^2 g(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial \overline{z_1}}+\left(\overline{z_1}-\overline{z_1^0}\right)\dfrac{\partial^2 g(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_1^2}}+\left(\dfrac{\gamma}{\delta_1}-1\right)\dfrac{\partial g(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_1}}=0,\\ \dfrac{\partial g(z_1,z_2)}{\partial \overline{z_2}}=0.\end{cases} \qquad (20)$$

(Понятно, что постановка этой задачи представляет интерес в том случае, если решение ищется в классе дифференцируемых, но не голоморфных функций – ведь системе уравнений (20) удовлетворяет любая голоморфная функция переменных z_1, z_2).

На основании теоремы 2 заключаем, что в качестве искомого решения $g(z_1,z_2)$ можно взять интеграл (1), имеющий те же самые компоненты γ и δ_1 ($\gamma \geq 1$, $\delta_1 > 0$), которые входят в систему (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нелаев, А.В.* Обобщение интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом [Текст] // Вестник МГОУ. – Серия «физика-математика». – М.: изд. МГОУ. – 2010, №1. – С. 3-16.
2. *Нелаев, А.В.* Обобщенно-аналитические свойства обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом [Текст] // Вестник МГОУ. – Серия «физика-математика». – М.: изд. МГОУ. – 2011, №3. – С.3 – 10.

THE GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN CONDITIONS ASSOCIATED WITH BI-CIRCLE INTEGRAL

A. Nelaev
Moscow region state university
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The author continues his investigation of generalized analitical properties of generalization of the Cauchy’s integral type associated with bicircle.
Keywords: Cauchy’s integral, bicircle.

УДК 514.7, 512.5