УДК 681.3.07

ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ РЕФЛЕКСИВНОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н.В. Ефимова

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. В статье рассматривается одна из проблем теории и практики обучения решению математических задач, связанная с заключительным этапом решения – с её исследованием, развитием, преобразованием. Отмечается необходимость перехода от математической задачи к учебной, а также рассматривается исследование задачи как средство этого перехода.
Ключевые слова. Рефлексивное исследование, поисковый этап исследования, обучающий характер задачи, развитие задачи, обобщение и аналогия

В теории обучения решению задач важное место отводится определению их роли в обучении математике. Л.М. Фридман справедливо считает, что общее умение, *общий подход к решению математических задач* должен сохраниться у каждого выпускника школы надолго, так как он является, по сути, «моделью разумного подхода к решению любых – бытовых, практических, технических и иных задач, которые будут повседневно встречаться человеку на протяжении всей его жизни. Ведь жить – это значит решать задачи!» [1, с.59]. Таким образом, формирование у учащихся общего подхода к решению задач, общего умения решать математические задачи, усвоение обобщенного способа решения задач в современной дидактической системе рассматривается как одна из целей обучения математике. Этому принципиально важному положению возражает Н.М. Бескин. По его мнению, «обучение решению задач» – это ложная цель [2, с.3]. Фактически, Н.М. Бескин полемизирует и с выдающимся математиком и педагогом Дж. Пойа, который считает, что «владение математикой – это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности. Поэтому первая и самая главная обязанность курса математики дней школы состоит в подчеркивании методической стороны процесса решения задач» [3, с.16].

Умение ребенка проводить *рефлексивное исследование задачи* (РИЗ) играет существенную роль в обучении их решению. *Под рефлексивным исследованием задачи понимается исследование учащимся собственной деятельности по решению задачи: последовательности действий, их правильного выполнения, приобретенного в ходе решения опыта* [4, с.60]. Рефлексивное исследование придает математической задаче характер учебной задачи, дополняя ее целым рядом учебных заданий.

Вообще, исследование задачи надо рассматривать как *центральный этап рефлексивного исследования задачи.* Первый этап связан с *поиском решения (поисковый этап),* а третий – собственно *с рефлексивным исследованием.* Центральный этап, связанный с исследованием и развитием задачи – *исследовательский этап.* Исследовательский этап, несомненно, является подготовительным перед собственно рефлексивным исследованием задачи, а в некоторых случаях, даже и началом рефлексивного исследования. Обоснование необходимости этого этапа можно найти во многих работах, посвящённых обучению решения задач. Вот лишь некоторые примеры. Вначале из наставлений учащимся.

«Решив задачу, *оглянись назад* и изучи задачу и найденное решение в целом, установи, что полезно запомнить, а что можно забыть...» [5, с. 15]; «Заглянув в ответ, вы считаете свою работу над задачей законченной. Вы даже не отдаёте себе отчёта в том, как получено ваше решение, что вам нужно было знать, чтобы найти это решение»[6, с.21]. «Стремясь извлечь из своих целей максимальную пользу, старайтесь подметить в задаче, которую вы решаете, то, что сможет пригодиться и в будущем при решении других задач» [3, с.13]. Авторы этих рекомендаций (Л.М. Фридман, Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, Д. Пойа) отмечают необходимость перехода от *математической задачи к учебной* и фактически рассматривают *исследование задачи как средство этого перехода.*

Возникает вопрос о *дидактическом смысле исследовательского этапа в работе над задачей.* Очень важным и поучительным моментом работы над задачей является *возвращение* к уже решенной задаче. При вторичном изучении решения можно найти дополнительные подтверждения правильности полученного результата, а обобщение полученных результатов является ценным материалом при решении других задач.

Известные педагоги предлагают вводить в этап исследования не только составление задачи по некоторым элементам, общим с исходной задачей, но и составление обратной и её решения, составление аналогичной задачи, решение или составление задачи, обобщающей по тем или иным параметрам исходную. Легко заметить, что здесь указаны уже не только *результаты исследовательского этапа* – новые задачи, новые решения, но и *средства этого исследования – обобщение, аналогия.* Сюда естественно было бы отнести и *конкретизацию.*

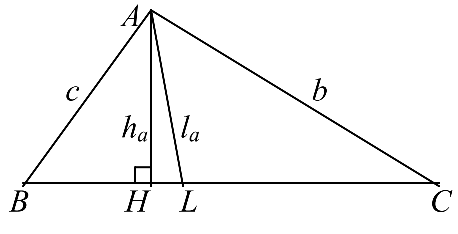
Наиболее распространенной формой обучения рефлексивному исследованию задач (РИЗ) является урок-практикум, или занятие-практикум. На уроках этого типа организуется работа по закреплению учебного материала, изложенного ранее. Специальной организационной формой обучения рефлексивному исследованию являются занятия-семинары по развитию задач. Основное отличие этих занятий состоит в том, что если на других занятиях развитие задачи выступает частью, элементом обучения, то на семинаре по развитию задач всё учебное время посвящается главным образом исследовательскому этапу рефлексивного исследования.

Приведём пример задач, которые могут быть использованы при различных формах занятий (урок-практикум, семинар по развитию задачи, самостоятельная работа).

Задача 1. Доказать, что в любом треугольнике ABC $h_a = \dfrac{2p\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$,

где h_a – высота, опущенная из вершины A, 2p – периметр треугольника.

Приведем решение этой задачи. Из рисунка видно:



$$a = h_a(ctgC + ctgB) = h_a \frac{\sin(C+B)}{\sin C \sin B} = h_a \frac{\sin A}{\sin C \sin B}.$$

$$b = \frac{h_a}{\sin C}; \qquad c = \frac{h_a}{\sin B}.$$

$$2p = h_a\left(\frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) = h_a \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin C \sin B} =$$

$$= h_a \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin C \sin B} = h_a \frac{2\cos\frac{A}{2}(\cos\frac{C+B}{2} + \cos\frac{B-C}{2})}{\sin C \sin B} =$$

$$= h_a \frac{4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = h_a \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

Следовательно, $h_a = \dfrac{2p\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$.

Учитель просит исследовать решение задачи и выделить существенные факты. Ожидается, что результатом исследования будут:

а) формула

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},\ где\ \ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \qquad (1)$$

б) заметив, что $\angle BLA = \angle C + \angle\frac{A}{2}$ из треугольника AHL выразим биссектрису l_a также через периметр треугольника и его углы:

$$l_a = \frac{h_a}{\sin\angle BLA} = \frac{2p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin(C+\frac{A}{2})} = \frac{4p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin C + \sin(C+A)} = \frac{4p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin C + \sin B}.$$

Таким образом, $l_a = \dfrac{4p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin C + \sin B}$

Эффективным может быть рефлексивный этап исследования этой задачи. Очевидно, что из трех формул особого внимания заслуживает (1). Может быть, её полезно и запомнить.

Большое значение в обучении решению задач, как и в обучении РИЗ, имеют задачи на построение. Приведем пример такой задачи.

Задача 2. Дана вершина A треугольника ABC и две прямые m ,l , которым принадлежат биссектрисы этого треугольника, не содержащие данной вершины. Постройте этот треугольник.

Эту несложную задачу можно разобрать устно. На исследовательском этапе ученики могут задать вопросы: «Как построить треугольник, если m, l -прямые, которым принадлежат а) высоты; б) серединные перпендикуляры; в) медианы?» (развитие задачи по линии аналогии). Небольшие затруднения, как правило, вызывает случай в).

Рассмотрение задачи 2 показывает, как значительно экономится учебное время. Действительно, если задачу оставить без рефлексивного исследования, то ученик повторяет только свойство биссектрисы и осевой симметрии, а при исследовании учебный материал значительно расширяется. Это является ещё одним мотивом для учеников в проведении РИЗ.

Задача 3. Решить уравнение:

$$\sin z\sin(60^0-z)\sin(60^0+z)=\frac{1}{8} \qquad (2)$$

Решение:

$$(2)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin z(\cos 2z-\cos 120^0)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin z\cos 2z-\frac{1}{2}\sin z\cos 120^0=\frac{1}{8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\sin(-z)+\frac{1}{4}\sin 3z+\frac{1}{4}\sin z=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin 3z=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \sin 3z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=(-1)^k\cdot 10^0+60^0k,\ k\in Z.$$

Ответ: $z=(-1)^k\cdot 10^0+60^0k,\ k\in Z.$

(Другой вариант преобразования левой части уравнения может привести к формуле синуса тройного аргумента, которую ученик должен знать до решения задачи).

Анализ решения приведет к формуле

$$4\sin\alpha\sin(60^0-\alpha)\sin(60^0+\alpha)=\sin 3\alpha\ .$$

По аналогии имеет смысл проверить следующую формулу:

$$4\cos\alpha\cos(60^0-\alpha)\cos(60^0+\alpha)=\cos 3\alpha.$$

Теперь очевидно, что справедливы следующие формулы:

$$tg\alpha\cdot tg(60^0-\alpha)\cdot tg(60^0+\alpha)=tg3\alpha\ \ и\ \ ctg\alpha\cdot ctg(60^0-\alpha)\cdot ctg(60^0+\alpha)=ctg3\alpha.$$

Использовав в развитии задачи *обобщение* и *аналогию*, можно перейти к *конкретизации* и получить ряд тождеств.

Если $\alpha=6^0$, то $4\sin 6^0\cdot\sin 54^0\cdot\sin 66^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, здесь учтено, что $\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Если $\alpha=10^0$, то $tg10^0\cdot tg50^0\cdot tg70^0=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Если $\alpha=5^0$, то $4\cos 5^0\cdot\cos 55^0\cdot\cos 65^0=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}$.

Если $\alpha=7{,}5^0$, то $ctg7{,}5^0\cdot ctg52{,}5^0\cdot ctg67{,}5^0=ctg22{,}5^0=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$.

Всё вышеизложенное обобщают следующие положения:

– в обучении решению задач в соответствии с сущностью РИЗ выделяются три направления: обучение поисковым, исследовательским и рефлексивным возвращениям.

– в обучении поисковым возвращениям важно на различном учебном материале сформировать у учащихся представление о решении и поиске решения задачи, научить использовать пробные возвращения в качестве средства исследования математического текста, постановке вопросов, подзадач в процессе решения данной задачи.

– в обучении исследовательским возвращениям необходимо практиковать такие задания, как: составьте дополнительные задачи; самостоятельно составьте задачу, соответствующую данному способу решения; составьте задачу, где данный способ использовать можно, но решение не будет рациональным; найдите ошибку в решении. На конкретных примерах важно показать учащимся взаимосвязь поисковых и исследовательских возвращений, в частности, то, что к основной идее решения можно прийти путем обобщения, или конкретизации, или аналогии.

– в обучении рефлексивным возвращениям целесообразно использовать рефлексивные вопросы и задачи, приём самонаставления, который относится не только к работе над конкретной задачей, но и к наиболее важным актам учебной деятельности.

– в обучении РИЗ используются разнообразные методы обучения, при этом доминирующими выступают эвристический и исследовательский методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фридман, Л.М.* Методика обучения решению математических задач. //Математика в школе. – 1991. – №5. – С.59-63
2. *Бескин, Н.М.* Роль задач в преподавании математики. // Математика в школе. – 1992. №4-5. – С.3-4 Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. – М., ИНТОР. – 1996.– 544 с.
3. *Пойа, Д.* Математическое открытие. – М., Наука, 1972. – 448 с.
4. *Ольбинский, И.Б.* О рефлексивном исследовании математической задачи // Народное образование в XXI веке. Тезисы научных докладов Международной юбилейной научно-практической конференции, посвященной 70-летию МПУ, 2001. – С.60-61
5. *Фридман, Л.М., Турецкий Е.Н.* Как научиться решать задачи. Книга для учащихся. – М., Просвещение, 1984. – 175 с.
6. *Колягин, Ю.М., Оганесян В.А.* Учись решать задачи. Пособие для учащихся VII-VIII классов. – М., Просвещение, 1980. – 96 с.

THE INSTRUCTION PROBLEMS OF THE REFLEX STUDYING MATHEMATICS SUMS

N. Efimova

Moscow Regional State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. One of the problem's solving mathematics sums instruction practice and theory is considered in this article (the final stage – studying, development, transformation). It drawns attention to need to proceed from the mathematics sum to the teaching and studying sum as the mean of this proceed.
Keywords. Mathematics sum, reflex studying, searching stage of studying, instruction, character of the sum, essence of the sum solve, development of the sum