

15. *Tomasi, C., Kanade T. Shape and Motion from Image Streams: a Factorization // International Journal of Computer Vision. 1992. Vol. 9. No. 2. P. 137-154.*

## **METHODS OF IMPROVE THE QUALITY ESTIMATES OF FUNDAMENTAL MATRIX**

**V. Alenin\*, O. Kulyas\*\***

*\*Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara)*

*23, L. Tolstogo st., Samara, 443010, Russia*

*Dimitrovgrad Institute of Technology Management and Design*

*(branch Ulyanovsk State Technical University)*

*294, Kuibyshev st., Dimitrovgrad, Ul'yanskovsk Region, 443511, Russia*

*\*\*Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara)*

*23, L. Tolstogo st., Samara, 443010, Russia*

*Abstract.* The fundamental matrix (FM) is one of the essential components of reconstruction algorithms on a set of three-dimensional scene images. Accuracy assessment of FM affects the accuracy of the calculations of many other components of the reconstruction algorithms, derived from the FM, such as the matrix of projections, the external camera parameters (expressed by the rotation matrix R and the transfer vector t), etc. As a result, the accuracy of calculations of all these components affects the accuracy of the reconstruction model. The paper will be presented a set of methods, all of which allow more accurate calculation of the FM, in the presence of input data measurement errors.

*Key words:* reconstruction, key points, fundamental matrix, robust estimation methods.

УДК 37.016:51

## **ОБЪЕДИНЕНИЕ МНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЕМПСТЕРА-ШАФЕРА**

**К.М. Дякин, Л.И. Федоров**

*Государственный университет управления*

*109542, Москва, Рязанский пр., 99*

*Аннотация.* На основе теории правдоподобия Демпстера-Шафера предложен алгоритм классификации в задаче обработки несовершенных данных с плохо разделяемыми классами, решается задача согласования мнений в различных ситуациях.

*Ключевые слова:* Интеллектуальный анализ данных, теории правдоподобия Демпстера-Шафера, оценка суждений.

Задача согласования мнений возникает в самых различных ситуациях. Принятие решения на основе суждений различных экспертов, выработка консенсуса в спорных вопросах, обработка данных, полученных из разных источников - вот краткий перечень подобного рода ситуаций. В настоящей работе авторы стремились представить тео-

рию правдоподобия Демпстера-Шафера [1], разработанную для объединения суждений и на основании теории предложить алгоритм классификации данных.

Пусть для примера рассматривается ситуация выставления оценки при защите выпускной работы перед комиссией, состоящей из  $n$  преподавателей. Допустим, мнения преподавателей выражены качественно следующим образом:

- 1- оценка не ниже четверки, скорее отлично.
- 2- оценка не выше четверки, скорее удовлетворительно.
- 3- оценка положительная, без предпочтений.

На основании указанных суждений комиссия должна выставить одну из оценок – отлично, хорошо, удовлетворительно. В терминах теории правдоподобия Демпстера-Шафера шкала оценок образует контекст рассуждения  $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$  - множество, элементы которого названы гипотезами (концептами). В нашем примере контекст состоит из трех отмеченных выше оценок. То, что они до поры до времени, то есть пока суждения членов комиссии не объединены, остаются неопределёнными, оправдывает их название «гипотезы». Суждения членов комиссии выражаются выбором некоторого подмножества из контекста рассуждения. Количество различных суждений равно  $2^{|\Omega|}$  - число всех возможных подмножеств  $\Omega$ . В нашем примере, суждения можно оформить таким образом:

- 1- «Хорошо» или «Отлично»;  
«Отлично»
- 2- «Хорошо» или «Удовлетворительно»;  
«Удовлетворительно»
- 3- «Удовлетворительно», «Хорошо» или «Отлично»

Поскольку каждый член комиссии может иметь  $2^{|\Omega|}$  суждений, то, естественно, ожидать, что потребуется каждое из них взвесить количественно. Таким образом, основу теории правдоподобия Демпстера-Шафера составляет функция отображения

$$m(A): 2^{\Omega} \Rightarrow [0;1], \quad (1)$$

определяющая как бы «весомость» суждения  $A$  среди остальных суждений. В первых работах [2] авторы теории правдоподобия называли это «массой» суждения, после чего закрепилось обозначение этой функции  $m(A)$ . В настоящее время общепринятым является название «базисная вероятностная оценка» (basis probabilistic assignment–bpa), при этом, однако, связь данной оценки с теорией вероятностей не предполагается. Теория правдоподобия Демпстера развивалась в некотором смысле как альтернатива теории вероятности. Оценки (массы, bpa) суждений должны быть нормированы так, что сумма оценок суждений каждого источника оценки станет равной единице.

Для примера с выставлением оценки суждения членов комиссии, уточненные количественно, пусть получают в следующем виде:

- |                                                 |      |
|-------------------------------------------------|------|
| 1- «Хорошо» или «Отлично»-                      | 0.4; |
| «Отлично» -                                     | 0.6  |
| 2- «Хорошо» или «Удовлетворительно»-            | 0.7; |
| «Удовлетворительно»-                            | 0.3  |
| 3- «Удовлетворительно», «Хорошо» или «Отлично»- | 1.0  |

На базе функции (1) в теории Демпстера-Шафера строится еще несколько функций, применяемых для вычислений, но, в принципе, содержащие ту же информацию, что и базисные вероятностные оценки.

1. Функция доверия

$$Bel(A) = \sum_{X \subseteq A} m(X) \quad \forall X \in 2^{\Omega}. \quad (2)$$

Функция доверия как бы собирает все элементы суждений, которые входят в суждение А.

Очевидно, что для элементарных суждений ( гипотез)

$$Bel(\theta) = m(\theta),$$

причем принимается также, что

$$Bel(\emptyset) = m(\emptyset) = 0.$$

В примере с оценками  $Bel_1(\text{«Хорошо» или «Отлично»}) = 0.6 + 0.4 = 1.$

2. Функция общности (commonality fuction):

$$Com(A) = \sum_{A \subseteq X} m(X) \quad \forall X \in 2^{\Omega}. \quad (3)$$

3. Функция сомнения(doubt fuction):

$$Dou(A) = 1 - Bel(\neg A). \quad (4)$$

4. Функция правдоподобия (plausibility function, в первоначальном варианте она назвалась- upper probability fuction):

$$Pl(A) = 1 - Dou(A) = \sum_{X \mid X \cap A \neq \emptyset} m(X). \quad (5)$$

В функции доверия суммирование осуществляется только по подмножествам множества А, в то время как в функции правдоподобия суммирование по подмножествам, имеющим с А, хотя бы пересечение. Поэтому выполняется очевидное соотношение

$$Bel(A) \leq Pl(A)$$

Интервал между функцией доверия и функцией правдоподобия определяет размер неопределённости суждения А.

Суждения из двух различных источников объединяются в теории Демпстера-Шафера по следующим формуле:

$$m_{1,2}(A) = k \sum_{X \cap Y = A} m_1(X) * m_2(Y) \quad \forall X, Y \in 2^{\Omega}. \quad (6)$$

В формуле (6)  $k$  – множитель, используемый для нормировки. В последующих работах различных авторов предлагались иные формулировки для объединения суждений [3]. Принципиальная сторона объединяющей формулы (6) состоит в выборе правила консенсуса, которое в данном варианте теории использует конъюнкцию. В других работах в качестве объединяющего принципа использовалась конъюнктивная форма составляющих подмножеств суждения  $A$ . Предлагались также варианты с отказом от нормирующего множителя.

Имеется программная реализация расчётной стороны теории Демпстера-Шафера, представленной в [4] под названием Dempster-Shafer Engine(dne.exe). В программе можно задать источники суждений (в нашем примере- это преподаватели, члены комиссии), набор гипотез, образующих контекст рассуждений, для каждого источника – набор суждений (evidences) и в результате, получить объединяющие суждения, с рассчитанными функциями доверия, общности, сомнения и правдоподобия. По рассчитанным количественным мерам объединенного суждения можно выбрать гипотезу с максимальной массой.

Как и следовало ожидать, в нашем примере победителем оказывается оценка – «хорошо». Однако не все так тривиально просто получается в случае, если суждения находятся в существенном противоречии. В этих случаях теория Демпстера-Шафера может давать результаты, противоречащие интуитивно ожидаемым. Правило объединения Демпстера-Шафера (5) сглаживает различия в оценках экспертов и выпячивает любые даже незначительные совпадения. Если бы в комиссии из двух преподавателей мнения выражались бы так, что один предлагает четверку с массой 0.99 и тройку с массой 0.01, а второй преподаватель пятерку с массой 0.99 и тройку с массой 0.01, то в соответствии с правилом объединения получается результат:

$$m_{1,2}(5) = 0 \quad m_{1,2}(4) = 0 \quad m_{1,2}(3) = 1,$$

что явно несправедливо.

«Ахилесовой пятой» правила (5) является коэффициент нормирования

$$k = \frac{1}{1 - \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y)}, \quad (6)$$

который при наличии противоречивых оценок дает деление на нуль. Например, если один предлагает четверку с массой 1, а второй преподаватель пятерку с массой 1, то правило объединения не применимо.

В работе [5] теория была предложена, так называемая, модифицированная теория Демпстера-Шафера (DSmT), в которой слабости DST преодолены.

DSmT, включает Байесовский подход и DST как частные случаи. Так в случае, когда контекст рассуждения состоит из двух концептов  $(\theta_1, \theta_2)$ , тогда

• согласно вероятностной интерпретации базисных утверждений требует предположения полноты и несовместности гипотез, и в этом случае, имеет место условие:

$$m(\theta_1) + m(\theta_2) = 1$$

- согласно DST  $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$  и

$$m(\emptyset) + m(\theta_1) + m(\theta_2) + m(\theta_1 \cup \theta_2) = 1$$

- DSmT предполагает только полноту контекста рассуждений, и для базисных утверждений должно выполняться соотношение:

$$m(\emptyset) + m(\theta_1) + m(\theta_2) + m(\theta_1 \cup \theta_2) + m(\theta_1 \cap \theta_2) = 1$$

Таким образом, вместо показательного множества  $2^\Omega$  предполагается множество подмножеств  $D^\Omega = \{\Omega, \cup, \cap\}$ , замкнутое относительно операций объединения  $\cup$  и пересечения  $\cap$ , что связано с отказом от логического принципа исключенного третьего. В теории DSmT правило объединения не включает нормирующего множителя.

$$m_{1,2}(A) = \sum_{\substack{X \cap Y = A \\ \forall X, Y \in D^\Omega}} m_1(X)m_2(Y). \quad (7)$$

В свою очередь мера конфликтности суждений, выраженная

$$\sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y), \quad (8)$$

добавляется к слагаемому  $m(\theta_1 \cap \theta_2)$  так, что в итоге нормировка не требуется, она получается автоматически.

Возьмем рассмотренный ранее пример с полностью противоречивыми суждениями:

$$\begin{aligned} m_1(\theta_1) &= 1 & m_1(\theta_2) &= 0, \\ m_2(\theta_1) &= 0 & m_2(\theta_2) &= 1. \end{aligned}$$

При соединении суждений по формуле (6) получим:

$$\begin{aligned} m(\theta_1 \cap \theta_2) &= m_1(\theta_1 \cap \theta_2)m_2(\theta_1 \cap \theta_2) + m_1(\theta_1 \cap \theta_2)m_2(\theta_1 \cup \theta_2) + \\ &+ m_2(\theta_1 \cap \theta_2)m_1(\theta_1 \cup \theta_2) + m_1(\theta_2)m_2(\theta_1) + m_2(\theta_2)m_1(\theta_1) = \\ &= 0*0 + 0*0 + 0*0 + 0*0 + 1*1 = 1 \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления по формуле (6) дают

$$m(\theta_1) = 0 \quad m(\theta_2) = 0 \quad m(\theta_1 \cup \theta_2) = 0$$

Ситуация напоминает хасидскую историю о том как два ученика спорили по поводу положения в Талмуде, и пришли к мудрецу, чтобы тот сказал кто из них прав. Мудрец,

выслушав первого сказал, что тот прав, затем, выслушав второго сказал, что и тот прав, а на замечание третьего, что так не может быть, сказал тому, что и он прав тоже.

На следующей фазе развития теории DSmT, учитываются особенности контекста рассуждений, задаваемые условиями несовместности некоторых подмножеств, или обнаруживаемыми на стадии слияния суждений условиями отсутствия (исключения) некоторых концептов. Например, если становится известно, что  $\theta_1 \cap \mathcal{G}_2 = \emptyset$ , то масса этого суждения передается суждению  $\theta_1 \cup \mathcal{G}_2$ . Эти дальнейшие модификации теории правдоподобия составляет содержание гибридных моделей DSmT[6].

Теория правдоподобия применялась с успехом в тех областях, где наталкивалась на трудности теория байесовских сетей, теория нечетких множеств и подход теории вероятности. На основе теории правдоподобия DSmT авторами настоящей статьи предложен алгоритм классификации в задаче обработки несовершенных данных с плохо разделяемыми классами. Дадим краткое описание этого алгоритма. Пусть имеется обучающая выборка, состоящая из записей с бинарным классифицирующим признаком. Требуется отнести новую запись к одному из классов выборки.

Шаг 1. Для новой записи вычисляются расстояния до объектов обучающей выборки.

Шаг 2. Отбираются  $n \ll N$  (где  $N$  - число объектов в выборке) объектов с наименьшими расстояниями.

Шаг 3. Для  $k \in \overline{1, n}$  определяется доля объектов с заданным классифицирующим признаком. Отсутствие сведений о данном признаке трактуется как суждение типа

$$m(\theta_1 \cup \mathcal{G}_2) = p_k,$$

а ошибка кодирования (заполнения) - как суждение типа:

$$m(\theta_1 \cap \mathcal{G}_2) = q_k$$

Для различных значений  $k$  суждения могут оказаться противоречивыми.

Шаг 4. По формуле объединения суждений (7) формируется оценки, по которым выбирается класс классифицируемого объекта.

Поскольку происходит объединение  $n$  «суждений», то формула объединения должна быть взята в виде:

$$m(A) = \sum_{\substack{k \\ \forall X_k \in D^\Omega}} \prod_k m_k(X_k). \quad (8)$$

Эта формула применима, если не рассматриваются ограничения контекста рассуждения. В этих случаях для правила объединения суждений справедливы переместительное и ассоциативное правила. Из этого следует возможность последовательного применения  $k \in \overline{1, n}$  суждений.

Шаг 5. Выбор класса возможен как на основании массы объединяющего суждения, так и на основе функций (2, 3, 4, 5), которые в теории DSmT рассчитываются так же, как и в классической теории Демпстера-Шафера - DST.

Исследование алгоритма дают основания считать, что его можно использовать не только для классов со сложной структурой, но и для слабо разделимых классов с ошибками в исходных данных. Последнее обстоятельство играет особую роль в реальных системах хранения экспертных данных и базах знаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Shafer, G.* (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton: Princeton University Press
2. *Dempster, A.P.* (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Ann.Math. Statistics*, 38, 325–339.
3. *Smets, Ph.* Belief functions: the disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem, *International Journal of Approximate reasoning*, Vol. 9, pp. 1-35, 1993.
4. *Adrian, O' Neill.* , <http://www.quiver.freeserve.co.uk>
5. *Dezert, J.* Foundations for a new theory of plausible and paradoxical reasoning, *Inform. & Secur. J.*, Semerdjiev Ed., Bulg. Acad. of Sci., Vol. 9, 2002.
6. *Smarandache, F. & Dezert J.* *Advances and Applications of DSmT for Information Fusion*, American Research Press Rehoboth, 2004

#### OPINIONS ASSOCIATION BASED ON THE DEMPSTER–SHAFFER THEORY

**K. Dyakin, L. Fedorov**

*State University of Management  
99, Ryzanskiy Prospekt, Moscow, 109542, Russia*

*Abstract.* On the basis of the theory of plausibility of the Dempster–Shafer theory the algorithm of classification in a task of processing of the imperfect data with poorly divided classes is offered, the task of the coordination of opinions in various situations is decided

*Keywords:* Data-mining, Dempster–Shafer theory, estimation of OPINIONS.