

**FORMATION OF SILICON OXIDE DOPED
WITH YTTERBIUM AND ALUMINIUM
AND USING OF SALTS AND ALCOHOLATES**

**E. Grinberg¹⁾, L. Ischacova²⁾, G. Baranova³⁾
I. Strel'nikova¹⁾, V. Belyaev⁴⁾, V. Mikhel'¹⁾
N. Chernaya¹⁾, E. Sudarikova¹⁾, V. Zhadanov¹⁾**

¹⁾FGUE "IREA", Moscow
3, Bogorodsky val, Moscow, 107076, Russia

²⁾Fiber Optics Reseach Center of Russian Academy of Sciences
38, Vavilova st., Moscow, 119333, Russia

³⁾Mendeleyev University of Chemical Technology of Russia
9, Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia

⁴⁾Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The mechanism of formation of phases in the ytterbium oxide - aluminum oxide during the hybrid sol-gel process. Revealed that the phase formation takes place according to a diffusion mechanism similar to solid-phase synthesis, but at the molecular level. (The conditions for synthesis of crystalline phase of YAG obtained by heat treatment in a hybrid sol-gel synthesis of precipitation at a temperature of ≤ 900 °.)

Keywords: sol-gel method, hybrid method, semialkoxide method, yttrium-aluminum garnet.

УДК 537.311.31

**К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ МОМЕНТНОГО МЕТОДА
ДЛЯ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ
ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКИ ИЗ МЕТАЛЛА**

Э.В. Завитаев*, О.В. Русаков, А.А. Юшканов***.**

*Московский государственный университет леса (МГУЛ)
141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

**Московский государственный областной гуманитарный институт (МГОГИ)
164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22.

***Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10-А.

Аннотация. Впервые моментным методом рассчитана электрическая проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла. В качестве граничного условия задачи принято условие зеркально-диффузного отражения электронов от внутренней поверхности проволоки. Проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: тонкая проволока, функция распределения, электрическая проводимость.

1. Постановка задачи.

Однородное периодическое по времени электрическое поле напряжённости

$$\mathbf{E} = E_0 \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

где E_0 – амплитуда напряжённости, ω – частота, воздействует на электроны внутри проволоки и вызывает появление внутри неё высокочастотного тока плотности $\mathbf{j}$. Принимается, что направление электрического поля совпадает с осью симметрии проволоки. Скин-эффект не учитывается, т. к. радиус проволоки R предполагается малым по сравнению с характерной глубиной скин-слоя δ . Связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ в случае, когда радиус проволоки R сравним с длиной свободного пробега электронов в металле L , оказывается существенно нелокальной [1, 2]. Для описания этой связи применим кинетическое уравнение (в приближении времени релаксации) к вырожденному ферми-газу электронов находящемуся внутри проволоки. Для достаточно слабых внешних полей это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю $\mathbf{E}$ и по малым отклонениям $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от равновесной фермиевской функции распределения f_0 [3-5]:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (2)$$

Здесь e и $\mathbf{v}$ – соответственно, заряд и скорость электронов; τ – электронное время релаксации.

Функция распределения электронов

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}).$$

Отклонение $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ функции распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от равновесного значения $f_0(\varepsilon)$, возникающее под действием электрического поля (1), приводит к появлению внутри проволоки высокочастотного тока плотности [6]

$$\mathbf{j} = 2 \frac{m^3}{h^3} e \int \mathbf{v} f_1 d^3 \mathbf{v}. \quad (3)$$

Концентрация электронов n в проволоке определяется по стандартной формуле, согласно которой

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3 \mathbf{v} = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_F^3}{3}, \quad (4)$$

где h – постоянная Планка, m – эффективная масса электрона в металле, v_F – скорость Ферми.

Взяв в уравнении (2) поле $\mathbf{E}$ в виде (1), найдем $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ как решение этого уравнения. Затем, используя выражение (3), определим ток внутри проволоки.

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничного условия для неизвестной функции $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ на цилиндрической поверхности металлической проволоки. В качестве такого принимаем условия зеркально-диффузного отражения

электронов от поверхности ($r = R$):

$$\int_{v_r < 0} v_z f_1(v_r) d^3 v = q \int_{v_r < 0} v_z f_1(-v_r) d^3 v, \quad (5)$$

где v_r и v_z – соответственно, компоненты скорости в плоскости перпендикулярной к оси симметрии проволоки и скорости электрона вдоль оси симметрии проволоки; q - коэффициент зеркальности (вероятность зеркального отражения): $0 \leq q \leq 1$. При $q = 0$ получаем условие диффузного отражения электронов проводимости от внутренней поверхности металлической проволоки, а при $q = 1$ условие чисто зеркального отражения. При значениях $q \neq 0$ и $q \neq 1$ получаем различные варианты смешанного зеркально-диффузного отражения электронов.

2. Функция распределения.

Преобразуем кинетическое уравнение (2) используя функцию

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \exp(-i \omega t), \quad (6)$$

в результате получим новое уравнение

$$-i \omega g + \mathbf{v} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}} - e \mathbf{v} \mathbf{E}_0 = -\frac{g}{\tau}$$

Перейдя в последнем уравнении к цилиндрическим координатам [7], выбрав направление полярной оси Z , так, чтобы она совпадала с осью симметрии проволоки, имеем:

$$-i \omega g + v_r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial g}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial v_\varphi} - e v_z E_0 = -\frac{g}{\tau}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) проведём с помощью моментного метода [7], согласно которому функция g в приближении двух моментов представляется в виде:

$$g = a_1(r) v_z + a_2(r) v_z v_r. \quad (8)$$

Найдем соответствующие частные производные от выражения (8) и подставим их в уравнение (7), т.е.

$$\begin{aligned} -i \omega (a_1(r) v_z + a_2(r) v_z v_r) + v_r v_z \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} + v_r^2 v_z \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2 v_z}{r} a_2(r) - e v_z E_0 = \\ = -\frac{1}{\tau} (a_1(r) v_z + a_2(r) v_z v_r). \end{aligned} \quad (9)$$

Умножая выражение (9) на v_z , с учётом того, что $v = 1/\tau - i \omega$, имеем:

$$v (a_1(r) v_z + a_2(r) v_z v_r) v_z + v_r v_z^2 \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} + v_r^2 v_z^2 \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2 v_z^2}{r} a_2(r) - e v_z^2 E_0 = 0.$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$(va_1(r) - eE_0) \int v_z^2 d^3v + (va_2(r) + \frac{\partial a_1(r)}{\partial r}) \int v_z^2 v_r d^3v + \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} \int v_r^2 v_z^2 d^3v + \frac{a_2(r)}{r} \int v_\varphi^2 v_z^2 d^3v = 0.$$

Далее вычислив значения всех четырех интегралов (учитывая связи $v_r = v_\perp \cos \varphi$, $v_\varphi = v_\perp \sin \varphi$, $v_\perp^2 + v_z^2 = v_F^2$) и подставив их в последнее равенство, приходим к уравнению

$$va_1(r) - eE_0 + \frac{1}{7} v_F^2 \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} + \frac{1}{7} v_F^2 \frac{a_2(r)}{r} = 0. \quad (10)$$

Ещё одно уравнение для нахождения переменных $a_1(r)$ и $a_2(r)$, найдем, умножив (9) на $v_z v_r$, и, интегрируя по пространству скоростей:

$$\frac{\partial a_1(r)}{\partial r} = -va_2(r), \quad (11)$$

Объединим уравнения (10), (11) в систему, разрешив её относительно $a_1(r)$, т.е.

$$\frac{\partial^2 a_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} - \frac{7v^2}{v_F^2} a_1(r) = -\frac{7veE_0}{v_F^2}.$$

Перейдем в полученном уравнении к новой безразмерной переменной $\xi = r/R$, также учтём, что $z = \frac{R}{v_F} v = \frac{R}{v_F} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) = x - iy$, тогда

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - 7z^2 a_1 = -\frac{7zeE_0 R}{v_F}.$$

В результате мы получили модифицированное уравнение Бесселя [8], общее решение которого с учётом того обстоятельства, что при $\xi = 0$ плотность тока внутри проволоки не должна быть расходящейся функцией, имеет вид:

$$a_1(\xi) = A_0 + AI_0(z\sqrt{7}\xi), \quad (12)$$

где $A_0 = \frac{eE_0 R}{z v_F}$, $I_0(z\sqrt{7}\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi z\sqrt{7} \cos \alpha) d\alpha$.

Из (11) найдем, что

$$a_2(\xi) = -\frac{A\sqrt{7}}{v_F} I_1(z\sqrt{7}\xi), \quad (13)$$

где $I_1(z\sqrt{7}\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi z\sqrt{7} \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha$.

Воспользуемся граничным условием (5) для определения коэффициента A . Учтём, что при $(r = R)$ переменная $\xi = \frac{r}{R} = 1$, где [9, 10]

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) &= \frac{2}{m} \delta(v_z^2 + v_\perp^2 - v_F^2) = \frac{2}{m} \delta(v_z^2 - (v_F^2 - v_\perp^2)) = \frac{2}{m} \delta\left[(v_z - \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2})(v_z + \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2})\right] = \\ &= \frac{1}{m\sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}} \left[\delta(v_z - \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}) + \delta(v_z + \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$A = \frac{-\frac{2}{3}(1-q)A_0}{\frac{2}{3}(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{4}(1+q)I_1(z\sqrt{7})}. \quad (14)$$

Таким образом, найдены моментные коэффициенты $a_1(\xi)$ и $a_2(\xi)$ заданные равенствами (12) и (13) и удовлетворяющие функции распределения электронов

$$f_1 = \exp(-i\omega t) \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) [a_1(\xi) v_z + a_2(\xi) v_z v_r]. \quad (15)$$

Соотношения (12) - (14) полностью определяют функцию распределения (15) в случае зеркально-диффузного отражения электронов от внутренней поверхности цилиндрической проволоки.

3. Расчёт проводимости.

Найденная функция распределения позволяет определить ток (3) внутри проволоки. При вычислении интеграла (3) удобно перейти к цилиндрическим координатам, как в пространстве координат, так и в пространстве скоростей. Вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси Z , ось симметрии проволоки совпадает с осью Z .

Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z – компоненту, соответственно, и плотность тока (3) обладает лишь z – компонентой (линии тока являются прямыми параллельными оси Z) и вычисляется по формуле:

$$j_z = 2 \frac{m^3}{h^3} e \int v_z f_1 d^3 \mathbf{v},$$

где f_1 определяется выражением (15).

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону, и результат удваивается, поэтому, подставляя пределы интегрирования, приходим к выражению:

$$j_z = \frac{4em^2 \exp(-i\omega t)}{h^3} \int_0^{v_F} \int_0^{2\pi+\infty} \int_0^{\infty} \frac{v_z^2 \delta(v_z - \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2})}{\sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}} [a_1(\xi) + a_2(\xi) v_\perp \cos \varphi] v_\perp dv_\perp d\varphi dv_z =$$

$$= \frac{8\pi em^2 v_F^3 \exp(-i\omega t)}{3h^3} a_1(\xi).$$

С учётом (4) окончательно получим:

$$j_z = \frac{ne}{m} \exp(-i\omega t) a_1(\xi). \quad (16)$$

Далее, воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме, найдем удельную электрическую проводимость проволоки:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{x}{z} \left(1 + \frac{(q-1)I_0(z\sqrt{7}\xi)}{3 \left[\frac{1}{3}(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{8}(1+q)I_1(z\sqrt{7}) \right]} \right), \quad (17)$$

где $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ – объёмная статическая удельная проводимость металла.

Проинтегрировав выражение (16), определяем полный ток через поперечное сечение цилиндрической проволоки:

$$I = \int_0^R j_z dS = 2\pi \int_0^R j_z r dr = \frac{2\pi ne}{m} \exp(-i\omega t) \int_0^R a_1(\xi) r dr = \left| \frac{r = \xi R}{dr = R d\xi} \right| =$$

$$= \frac{2\pi ne}{m} \exp(-i\omega t) R^2 \int_0^1 a_1(\xi) \xi d\xi = \frac{2\pi ne}{m} \exp(-i\omega t) R^2 \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A}{z\sqrt{7}} I_1(z\sqrt{7}) \right).$$

Формально применяя закон Ома в виде $I=GU$, где U – напряжение на концах проволоки, получаем формулу для расчета интегральной проводимости проволоки G (электрическое поле внутри проволоки однородное, поэтому $U=EL$):

$$G = G_0 \frac{x}{z} \left(1 + \frac{2}{z\sqrt{7}} \frac{(q-1)I_1(z\sqrt{7})}{3 \left[\frac{1}{3}(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{8}(1+q)I_1(z\sqrt{7}) \right]} \right), \quad (18)$$

где $G_0 = \pi R^2 \sigma_0 / L$ – объёмная статическая интегральная проводимость металла.

Заметим, что при проведении численных расчётов результаты, полученные после применения формул (17) и (18), совпадают с результатами работы [9], в которой использовался другой математический подход к проблеме.

В заключение следует отметить, что применение моментного метода значительно упрощает расчёт электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки. Кроме того, этот приближенный метод (его погрешность по отношению к точному кинетическому расчёту составляет не более 10 %) позволяет получить аналитические выражения в случае построения теории скин-эффекта в тонкой проволоке, когда точное кинетическое решение невозможно за счёт возникающих математических трудностей.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Петров, Ю. И.* Физика малых частиц. Наука. М. 1984.
2. *Dingle, R.B.* The electrical conductivity of thin wires. // *Proc. Roy. Soc. A.* 1950. V. 201. P. 545-560.
3. *Харрисон, У.* Теория твердого тела. Мир. М. 1972.
4. *Займан, Дж.* Электроны и фононы. ИЛ. М. 1962.
5. *Лифшиц, И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И.* Электронная теория металлов. Наука. М. 1971.
6. *Ландау, Л. Д., Лифшиц И. М.* Электродинамика сплошных сред. Наука. М. 1982.
7. *Коган, М. Н.* Динамика разреженного газа. Наука. М. 1967.
8. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ. М. 1949.
9. *Завитаев, Э.В., Юшканов А.А.* Высокочастотная проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла. // *Микроэлектроника.* 2008. Т. 37. С. 429-438.
10. *Завитаев, Э.В., Юшканов А.А.* Зависимость электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки в продольном магнитном поле от характера отражения электронов. // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 130. С. 887-894.

ON APPLICATION OF INSTANTANEOUS METHOD FOR RECKONING OF ELECTRICAL CONDUCTION OF A THIN CYLINDRICAL WIRE OF METAL

E. Zavitaev*, O. Rusakov, A. Yushkanov*****

**Moscow State Forest University,
1, 1st Institute st., Mytishi, Moscow Region, 141005, Russia*

***Moscow Regional State Humanitarian Institute
22, Zelenaya st., Orekhovo-Zuyevo, Moscow Region, 164010, Russia*

****Moscow Regional State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. For the first time the electrical conduction of a thin cylindrical wire of metal was reckoning by the instantaneous method. The condition of the specular diffuse reflection of electrons off an internal surface of wire was taken as a boundary condition of the problem. The discussion of the results derived was made.

Keywords: a thin wire, cumulative distribution curve, electrical conduction of smth.