

$\pi_{n_k}(f) \asymp \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^{\gamma}, k \rightarrow \infty$. Obtained result: zero sets of classes $H_{q_1, \gamma}^p$ and $H_{q_2, \gamma}^p$ with $q_1 \neq q_2$ are different.

Keywords: analytic functions, spaces of analytic functions, zeros of analytic functions.

УДК 517.929

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.Р. Абдуллаев, Э.В. Плехова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Аннотация. Рассматривается задача Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Получены достаточные условия существования решения без предположения однозначной разрешимости соответствующей линейной краевой задачи. На нелинейную часть системы уравнений налагается условие типа «подлинейного» роста. Для доказательства основного утверждения применяется доказанная в работе вспомогательная теорема существования для квазилинейного операторного уравнения с сюръективным, но необратимым линейным оператором.

Ключевые слова: существование решения, задача Коши, уравнение нейтрального типа.

Наиболее распространенные классы квазилинейных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) имеют главную часть линейного оператора [4], представимую в виде $Q: B \rightarrow B$, $Q = I - S - K$, где I - тождественный оператор, S - оператор внутренней суперпозиции и K - вполне непрерывный оператор; B - банахово функциональное пространство. При этом уравнение принято называть уравнением «нейтрального типа», если оператор S ненулевой. Таким образом, уравнениями нейтрального типа называют такие уравнения, в которых отклонение аргумента присутствует в старшей производной.

В известных исследованиях краевых задач для ФДУ предполагаются выполненными условия, обеспечивающие обратимость оператора $(I - S): B \rightarrow B$, т.е. фредгольмовость оператора Q . До настоящего времени не исследованным остается случай, когда оператор $I - S$ не является обратимым. Актуальность изучения уравнений нейтрального типа в случае необратимости упомянутого оператора обусловлена и тем, что при этом соответствующая линейная однородная краевая задача может иметь бесконечное число решений [2]. Эта особенность создает значительные трудности в применении классических методов исследования краевых задач к уравнениям нейтрального типа.

В настоящей работе впервые рассматривается случай уравнения нейтрального типа, для которого оператор $I - S$ не является обратимым.

Введем следующие обозначения. Пусть R^n - n -мерное пространство вектор-столбцов с нормой элемента $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемой равенством

$|x|_{R^n} = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Положим $E = [a, b] \subset R^1 = (-\infty, \infty)$ и определим следующие банаховы функциональные пространства: $L_2 = L_2[a, b]$ - пространство скалярных суммируемых по Лебегу с квадратом функций, с нормой $\|\cdot\|_{L_2}$; L_2^n - пространство n -мерных вектор-функций $y: E \rightarrow R^n$, $y(t) = \text{col}(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$, таких что $y_i \in L_2, i = \overline{1, n}$, с нормой $\|y\|_{L_2^n} = \sum_{i=1}^n \|y_i\|_{L_2}$; L_∞ - пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $y: E \rightarrow R^1$, с нормой $\|y\|_\infty = \text{vrai sup}_{t \in E} |y(t)|$; D_2^n - пространство таких абсолютно непрерывных вектор-функций $x: E \rightarrow R^n$, что $x' \in L_2^n$, с нормой $\|x\|_{D_2^n} = |x(a)|_{R^n} + \|x'\|_{L_2^n}$. Сопряженное пространство $(L_2^n)^*$ будем отождествлять с пространством n -мерных вектор-строк L_2^n . Согласованная норма на пространстве $(L_2^n)^*$ определена равенством $\|\omega\|_0 = \max_{i=\overline{1, n}} \|\omega_i\|_{L_2}$, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t))$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$A(t)x'(t) + B(t)x_h'(t) = f(t, (Tx)(t)), \quad (1)$$

$$x(a) = \alpha, \quad (2)$$

где $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ - $n \times n$ -матрицы, $h(\cdot): E \rightarrow R^n$ - вектор-функции с измеримыми компонентами, $x_h'(t) = \text{col}(x_1'(h_1(t)), x_2'(h_2(t)), \dots, x_n'(h_n(t)))$ и $x_i'(\xi) = 0$ при $\xi \notin E$; функция $f: E \times R^n \rightarrow R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $T: D_2^n \rightarrow L_2^n$ - линейный вполне непрерывный оператор; $\alpha \in R^n$.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать такую вектор-функцию $x: E \rightarrow R^n$, $x \in D_2^n$, которая почти всюду удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

1. Оператор внутренней суперпозиции.

Символом $m(e)$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества $e \subset R^1$.

Предположим, что $i, j = \overline{1, n}$ произвольно зафиксированы. Рассмотрим оператор внутренней суперпозиции $S_{ij}: L_2 \rightarrow L_2$, определенный на пространстве скалярных функций равенством

$$(S_{ij}y)(t) = b_{ij}(t)y_j(h_j(t)), \quad y_j(\xi) = 0, \text{ при } \xi \notin E. \quad (3)$$

Приведем сведения об операторе S_{ij} , необходимые для доказательства сюръективности главной линейной части уравнения (1). Далее будем предполагать выполненным необходимое условие действия оператора S_{ij} , а именно: для каждого измеримого множества $e \subset E$ из равенства $m(e) = 0$ следует $m(h_j^{-1}(e)) = 0$. В этом случае для функции

множества $\mu_j(e) = m(h_j^{-1}(e))$ существует производная Радона-Никодима $\mu'_j(t)$ [5]. Положим:

$$\beta_{ij}(t) = b_{ij}(t) \left(\mu'_j(t) \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Лемма 1. [6] Если $\beta_{ij} \in L_\infty$, то оператор $S_{ij} : L_2 \rightarrow L_2$, $i, j = \overline{1, n}$, определенный равенством (3), ограничен, причем $\|S_{ij}\| = \|\beta_{ij}\|_\infty$.

Повторяя, с незначительными модификациями, доказательство утверждение работ [1, 3], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполнены условия:

- 1) $m(h_i(E) \setminus E) = 0$ и существует такая измеримая функция h_i^{-1} , что почти всюду выполняются равенства $h_i(h_i^{-1}(\tau)) = \tau$, $\tau \in h(E)$ и $h_i^{-1}(h_i(t)) = t$, $t \in E$;
- 2) $\text{vrai} \inf_{t \in E} |\beta_{ii}(t)| = q_i > 0$.

Тогда оператор $S_{ii} : L_2 \rightarrow L_2$ сюръективен и справедливо неравенство:

$$\|S_{ii}^* \omega\|_{L_2} \geq q_i \|\omega\|_{L_2}, \quad \omega \in L_2.$$

2. Теорема существования.

Положим $y(t) = x'(t)$ и определим оператор $V : L_2^n \rightarrow D_2^n$ равенством: $(Vy)(t) = \int_a^t y(s) ds$.

Представим задачу Коши (1), (2) в виде операторного уравнения. При этом оператор, соответствующий слагаемому $B(t)x'_h(t)$ в уравнении (1), представим в виде суммы двух операторов: «диагонального» S и «внедиагонального» H . Полагая

$$\begin{aligned} M : L_2^n &\rightarrow L_2^n, (My)(t) = A(t)y(t); \\ S : L_2^n &\rightarrow L_2^n, S = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}; \\ H : L_2^n &\rightarrow L_2^n, H = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & 0 & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \\ N : L_2^n &\rightarrow L_2^n, (Nz)(t) = f(t, z(t)), \end{aligned}$$

получим уравнение:

$$My + Sy + Hy = NT(\alpha + Vy). \quad (5)$$

Если существует решение $y \in L_2^n$ уравнения (5), то функция $x(t) = \alpha + Vy$ является решением задачи (1), (2). Поэтому будем исследовать на разрешимость квазилинейное уравнение (5). Левоу части уравнения (5) соответствует линейный оператор $(M + S + H): L_2^n \rightarrow L_2^n$. Утверждение леммы 2 позволяет получить условия сюръективности оператора S .

Лемма 3. Если для каждой пары функций $b_{ii}(\cdot)$ и $h_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$ выполнены условия леммы 2, то оператор S сюръективен и справедливо неравенство $\|S^* \omega\|_0 \geq q \|\omega\|_0$, $\omega \in (L_2^n)^*$, где $q = \min_{i=\overline{1, n}} q_i = \min_{i=\overline{1, n}} \inf_{t \in E} |\beta_{ii}|$.

Доказательство. Сопряженный оператор $S^*: (L_2^n)^* \rightarrow (L_2^n)^*$ имеет вид:

$$S^* = \begin{pmatrix} S_{11}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{22}^* & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & S_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Для оператора S^* , в силу условий леммы 2, справедливы неравенства:

$$\|S^* \omega\|_0 = \max_{i=\overline{1, n}} \|S_{ii}^* \omega_i\|_{L_2} \geq \max_{i=\overline{1, n}} q_i \|\omega_i\|_{L_2} \geq \min_{i=\overline{1, n}} q_i \max_{i=\overline{1, n}} \|\omega_i\|_{L_2} = q \|\omega\|_0.$$

Таким образом, оператор S является сюръективным. Лемма доказана.

Для получения условий сюръективности суммы $M + S + H$ воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 4. Пусть X, Y - банаховы пространства и $L_1, L_2: X \rightarrow Y$ - линейные ограниченные операторы. Если для оператора L_1 выполнено неравенство $\|L_1^* \omega\| \geq q \|\omega\|$ и $q > \|L_2\|$, то оператор $L_1 + L_2$ сюръективен и справедливо неравенство $\|(L_1^* + L_2^*) \omega\| \geq (q - \|L_2\|) \|\omega\|$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 3, и

- 1) $a_{ij} \in L_\infty$, $i, j = \overline{1, n}$;
- 2) функции $b_{ij}(\cdot)$ и $h_j(\cdot)$, при всех $i, j = \overline{1, n}$ удовлетворяет условиям леммы 1 и справедливо неравенство:

$$q - \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_\infty - \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_\infty = q_0 > 0.$$

Тогда оператор $M + S + H$ сюръективен и справедливо неравенство $\|(M + S + H)^* \omega\|_0 \geq q_0 \|\omega\|_0$, $\omega \in (L_2^n)^*$.

Доказательство. Оценим нормы операторов M, H . Справедливы неравенства:

$$\|My\|_{L_2^n} = \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}(t) y_j(t) \right\|_{L_2} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|_{\infty} \|y_j\|_{L_2} \leq \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_{\infty} \|y\|_{L_2^n},$$

$$\|Hy\|_{L_2^n} = \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1, j \neq i}^n S_{ij} y_j \right\|_{L_2} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \|S_{ij}\| \|y_j\|_{L_2} \leq \left(\max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|S_{ij}\| \right) \|y\|_{L_2^n} = \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_{\infty} \|y\|_{L_2^n}$$

$$\text{Отсюда } \|M\| \leq \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_{\infty}, \quad \|H\| \leq \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_{\infty}.$$

Применение леммы 4 завершает доказательство.

При доказательстве условий существования решения операторного уравнения (5) применим следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

- 1) оператор L имеет дополняемое ядро;
- 2) существует такая константа $q > 0$, что неравенство $q\|\omega\| \leq \|L^* \omega\|$ выполнено для всех $\omega \in Y^*$;
- 3) оператор $F: X \rightarrow Y$ вполне непрерывен и существуют константы $c, d \geq 0$, $0 \leq \delta < 1$ такие, что $\|Fx\| \leq c + d\|x\|^\delta$ для всех $x \in X$.

Тогда уравнение

$$Lx = Fx \tag{6}$$

имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Условия 1), 2) гарантируют существование ограниченного правого обратного к L оператора $K: Y \rightarrow X$ [2, стр.40]. Рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$x = KFx. \tag{7}$$

Из существования решения уравнения (7) следует разрешимость уравнения (6). Для вполне непрерывного оператора $F_1: X \rightarrow X$, $F_1 = KF$ в силу условия 3) имеем:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\|F_1 x\|}{\|x\|} \leq \|K\| \left(\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{c + d\|x\|^\delta}{\|x\|} \right) = 0. \text{ Таким образом, оператор } F_1 \text{ удовлетворяет ус-}$$

ловиям теоремы 4 [7]. Существование неподвижной точки оператора F_1 , обеспечивает, разрешимость уравнения (6). Теорема доказана.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. Предположим, что функции h_i , $i = \overline{1, n}$ удовлетворяют условиям леммы 2, и пусть выполнены условия:

1) $a_{ij} \in L_\infty$;

2) $\beta_{ij} \in L_\infty$, где $\beta_{ij}(t) = b_{ij}(t) \left(\mu'_j(t) \right)^{1/2}$;

3) $\max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_\infty + \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_\infty < \min_{i=\overline{1, n}} \inf_{t \in E} |\beta_{ii}|$;

4) существуют такие $c, d \geq 0$, $0 \leq \delta < 1$, что справедливо неравенство $|f(t, u)|_{R^n} \leq c + d |u|_{R^n}^\delta$, $t \in E$ и $u \in R^n$.

Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Сначала напомним, что в гильбертовом пространстве ядро линейного ограниченного оператора, дополняемо, как замкнутое подпространство [7]. Ядро оператора $M + S + H$ дополняемо в L_2^n , так как выбранная норма на этом пространстве эквивалентна норме, порождаемой скалярным произведением гильбертова пространства. Согласно лемме 5, для оператора $M + S + H$ справедливо неравенство $\|(M + S + H)^* \omega\|_0 \geq q_0 \|\omega\|_0$, $\omega \in (L_2^n)^*$, с положительной константой

$$q_0 = \min_{i=\overline{1, n}} \inf_{t \in E} |\beta_{ii}| - \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_\infty - \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_\infty.$$

Оператор в правой части уравнения (5) является вполне непрерывным, как произведение линейного ограниченного оператора $V: L_2^n \rightarrow D_2^n$, линейного вполне непрерывного оператора $T: D_2^n \rightarrow L_2^n$ и непрерывного оператора Немыцкого $N: L_2^n \rightarrow L_2^n$. Из условия 4), с учетом равенства $\|Vy\|_{D_2^n} = \|y\|_{L_2^n}$, можно получить оценку $\|NT(\alpha + Vy)\| \leq c_1 + d_1 \|y\|^\delta$, где новые константы c_1, d_1 зависят от $c, d, \alpha, \|T\|$, при этом показатель δ не меняется. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

В качестве примера применения теоремы 2 рассмотрим следующую задачу для скалярного уравнения ($n = 1$):

$$\begin{cases} a(t)x'(t) + \mu x'(kt) = f(t, x(g(t))), & t \in [0, 1] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (8)$$

Как отмечено в работе [8], такого вида задачи возникают в моделях квантовой механики.

Будем предполагать, что: $a \in L_\infty$, $\mu \in R^1$, $k \in (0, 1]$, удовлетворяющая условию Каратеодори функция $f: [0, 1] \times R^1 \rightarrow R^1$ такова, что существуют такие $c, d \geq 0$, $0 \leq \delta < 1$, что справедливо неравенство $|f(t, u)| \leq c + d |u|^\delta$, $t \in E$, $u \in R^1$, $g: [0, 1] \rightarrow R^1$ - измеримая и ограниченная в существенном функция почти всюду на $[0, 1]$, удовлетворяющая неравенству $0 \leq g(t) \leq t$.

Непосредственная проверка условий теоремы 2 приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. Если выполнено неравенство $\|a\|_\infty < \mu/\sqrt{k}$, существует решение задачи (8) в пространстве D_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев, А.Р. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммированных функций // ВИНТИ №981-81, РЖмат №5, 81Б842. - 20 с.
2. Абдуллаев, А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологических операторов. Челябинск: Челяб. гос. ун-т., 1994. 93 с.
3. Березанский, Л.М. К вопросу об условиях приводимости функционально-дифференциальных уравнений к каноническому виду // Диф. уравнения. 1990. Т.13, N10. С.1749–1756.
4. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. М.: Наука, 1991. 280 с.
5. Данфорд, Н. Дж. Т. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1972. 895 с.
6. Драхлин, М.Е. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций // Известия вузов. Математика. 1986. № 5. С17-24.
7. Треногин, В.А. Функциональный анализ. М.: Физ.-мат. лит, 2007. 488 с.
8. Furi, M., Martelli M., Vignoli A. On the solvability of nonlinear operator equations in normed spaces // Ann. mat. Pura ed Appl. 1980. N 124. P.321-343

CAUCHY PROBLEM FOR NEUTRAL TYPE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

A. Abdullaev, E. Plekhova

*Perm State Technical University
29, Komsomolsky Avenue, Perm, Russia*

Abstract. The Cauchy problem for quasilinear differential equations system of neutral type was considered. Without assumption of uniquely solvability of corresponding linear boundary value problem the sufficient conditions of existence of solution was derived. A nonlinear part of the equation system was imposed a condition of «under linear» growth. To prove the main statement an auxiliary solution existing theorem for an operator equation with surjective but non invertible linear operator was applied.

Keywords: existence of solution, Cauchy problem, equation of neutral type.