5. *Шерстюков В.Б.* О разложении мероморфных функций специального вида на простейшие дроби [Текст] // Analysis Mathematica. 2007. T. 33. C. 63-81.
6. *Шерстюков В.Б.* Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация [Текст] // Матем. сборник. 2009. Т. 200. № 3. С. 147-160.
7. *Шерстюков В.Б.* Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна [Текст] // Матем. сборник. 2011 (принята к печати).
8. *Titchmarsh E.C.* The zeros of certain integral functions [Text] // Proc. London Math. Soc. 1926. V. 25. Part 4. P. 283-302.

EXPANSION OF THE RECIPROCAL OF AN ENTIRE FUNCTION WITH ZEROS IN THE HALF-PLANE IN A SERIES OF PARTIAL FRACTIONS

V. Sherstyukov, E. Sumin, M. Tishchenko

National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. We study the problem of expanding the reciprocal of an entire function of exponential type with simple zeros located at a half-plane in a series of partial fractions. Our main result is the development of a theorem of M. G. Krein on the properties of an entire function with simple real zeros, the inverse of which can be decomposed into simple fractions. These results demonstrate the possibility of using specific examples. The first of these is the Laplace transform, taken in a finite interval with decreasing it original. Second - regularly encountered in the analysis and probability errors integral.
Keywords: entire function, partial fraction, Krein's series, Laplace transform, errors integral.

УДК 517.5

О КОРНЯХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РОСТА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

С.Ф. Ягудина

Московский педагогический государственный университет
119991, Москва, ул. Малая Пироговская, д.1, стр.1

Аннотация. Для уточнения асимптотического поведения функций в конечной точке или на бесконечности удобно применять правило Бернулли-Лопиталя, в котором поведение отношения функций определяется с помощью отношения их производных. Однако не все функции дифференцируемы, поэтому актуальным является обобщение понятия производной таким образом, чтобы новое более широкое понятие сохранило свойства классической производной, а также было применимо к изучению относительного роста не дифференцируемых функций. Одно из таких обобщений рассматривается в данной работе. В ней также доказываются формулы для корней уравнения, дающих оценки относительного роста выпуклых функций в

тауберовых теоремах, в которых относительный рост обобщенных производных оценивается по относительному росту самих функций.
Ключевые слова: выпуклость, l-выпуклость, l-дифференцируемость, относительный рост, абелевы и тауберовы теоремы.

Одной из важнейших задач математического анализа является исследование относительного роста двух функций. К прямым задачам или задачам абелева типа относятся задачи, в которых относительный рост дифференцируемых функций определяется по относительному росту их производных. При естественных условиях справедлива теорема Бернулли-Лопиталя, которая утверждает справедливость неравенств:

$$\varliminf_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \le \varliminf_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{1}$$

$$\varlimsup_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \le \varlimsup_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1*}$$

В обратных задачах или задачах тауберова типа об относительном поведении производных функций судят по относительному росту самих функций. Неравенства противоположного смысла к (1)–(1*) в общем случае неверны, но при дополнительных (тауберовых) условиях такие неравенства можно получить. Одним из таких условий является выпуклость рассматриваемых функций. Как показано Брайчевым Г.Г. в [1, 110], для выпуклых функций справедлив следующий результат:

$$\varliminf_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ge a_1 \varlimsup_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{2}$$

$$\varlimsup_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \le a_2 \varlimsup_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{2*}$$

где a_1, a_2 – корни некоторого уравнения.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы или не выпуклы, то формулы (1)–(2*) теряют смысл, однако эти понятия можно обобщить таким образом, что приведенные выше результаты остаются справедливыми. Для наших целей мы используем следующие определения l-дифференцируемой и l-выпуклой функций.

Для инъективной в окрестности точки x_0 функции $l(x)$ односторонние l-производные функции $f(x)$ определяются формулами $f'_{l_\pm}(x_0) := \lim\limits_{x \to x_{0\pm}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{l(x) - l(x_0)}$. В дальнейшем для сокращения записей под $f'_l(x_0)$ будем понимать правостороннюю l-производную.

Пусть $l(x)$ инъективна на промежутке I. Функции $f(x)$ называется l-выпуклой на этом промежутке, если для произвольных x_1, x_2, x_3 из I, $x_1 < x_2 < x_3$, выполняется неравенство: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{l(x_2) - l(x_1)} \le \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{l(x_3) - l(x_2)}$.

Несколько отличные понятия выпуклости функции рассмотрены ранее в работах [4], [5].

Известно, что l-выпуклая на интервале функция в каждой точке этого интервала имеет односторонние l-производные. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $l(x)$ – строго возрастающая на интервале $(a;b)$, $b \le \infty$ функция, а $f(x)$ и $g(x)$ определены и l-дифференцируемы на нем.

Для l-дифференцируемых функций справедливо следующее обобщение правила Лопиталя [3, 199]:

$$\delta := \underline{\lim}_{x \to b-} \frac{f_l'(x)}{g_l'(x)} \le \underline{\lim}_{x \to b-} \frac{f_l(x)}{g_l(x)} =: t \tag{3}$$

$$\Delta := \overline{\lim}_{x \to b-} \frac{f_l'(x)}{g_l'(x)} \ge \overline{\lim}_{x \to b-} \frac{f_l(x)}{g_l(x)} =: T \tag{3*}$$

Далее предполагается, что функция $g(x)$ является l-выпуклой на интервале $(a;b)$ и удовлетворяет условию:

$$\lim_{x \to b-} \frac{g(x)}{l(x)} = \infty \tag{4}$$

Обратные к (3)–(3^*) неравенства дает следующая теорема тауберова типа.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют условию (4),* $f(x)$ *является* $l-$*выпуклой на* $(a;b)$. *Тогда выполняются неравенства*

$$\delta \ge \xi_1 T,\ \Delta \le \xi_2 T,$$

где $\xi_1(\theta) = \underline{\lim}_{x \to b-} \dfrac{1}{g_l'(x)} \sup_{t<x} \dfrac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)}$, $\quad \xi_2(\theta) = \overline{\lim}_{x \to b-} \dfrac{1}{g_l'(x)} \inf_{t>x} \dfrac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)}$.

Доказательство. Для l-выпуклой функции выполняются условия $f_l'(x) \le \dfrac{f(\tau) - f(x)}{l(\tau) - l(x)}$, $\forall \tau > x$. Для достаточно больших x имеем $t^* g(x) \le f(x) \le T^* g(x)$, $t = \max\{0; t - \varepsilon\}$, $T^* = T + \varepsilon$, тогда $f(\tau) - f(x) \le T^* g(\tau) - t^* g(x)$, или $\dfrac{f(\tau) - f(x)}{l(\tau) - l(x)} \le T^* \dfrac{g(\tau) - \theta g(x)}{l(\tau) - l(x)}$, $\theta = \dfrac{t^*}{T^*}$.

Откуда получим $f_l'(x) = \inf_{\tau > x} \dfrac{f(\tau) - f(x)}{l(\tau) - l(x)} \le T^* \inf_{\tau > x} \dfrac{g(\tau) - \theta g(x)}{l(\tau) - l(x)}$, и

$\Delta = \overline{lim}_{x \to b-} \dfrac{f_l'(x)}{g_l'(x)} \le T^* \overline{\lim}_{x \to b-} \dfrac{1}{g_l'(x)} \inf_{\tau > x} \dfrac{g(\tau) - \theta g(x)}{l(\tau) - l(x)} = \xi_2(\theta)(T + \varepsilon)$. Это при $\varepsilon \downarrow 0$ дает $\Delta \le \xi_2 T$. Для ξ_1 доказательство аналогичное.

Введем следующую характеристику функции $g(x)$

$$\varphi_g(\xi) = \overline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{g(t_x) + \xi g_l'(x)(l(x) - l(t_x))}{g(x)}, \tag{5}$$

где $t_x = \sup\{t : g_l'(t) \le \xi g_l'(x)\}$, а если множество в фигурных скобках пусто, то считаем, что $t_x = a$. Известно, что функция $\varphi_g(\xi)$ возрастает при $0 \le \xi \le 1$ и убывает при $\xi \ge 1$.

Нетрудно проверить, что когда $g(x) = x^n,\ n \ne 0$, то при $l(x) = \ln x,\ x > 0$, функция $\varphi_g(\xi)$ имеет вид $\varphi_g(\xi) = \xi \ln\frac{e}{\xi}, \xi > 0$, а при $l(x) = x^m$, $m > 0$, $n > m$, функция $\varphi_g(\xi)$ имеет вид $\varphi_g(\xi) = (1 - \frac{n}{m})\xi^{\frac{n}{n-m}} + \frac{n}{m}\xi$. Эти случаи являются модельными для широкого класса функций.

Характеристика $\varphi_g(\xi)$ в случае $l(x) = x$ была введена Братищевым А.В. в [2, 101].

Непосредственное вычисление корней по формулам теоремы 1 затруднительно, однако замечательным является тот факт, что величины ξ_1 и ξ_2 являются корнями уравнения $\varphi_g(\xi) = \frac{t}{T}$. При этом под корнями уравнения $\varphi_g(\xi) = \frac{t}{T}$ мы понимаем абсциссы пересечения границы подграфика функции $y = \varphi_g(\xi)$ и графика функции $y = \frac{t}{T}$. Точнее говоря, полагаем $\xi_1 = \inf\{\xi > 0 : \varphi_g(\xi) \ge \frac{t}{T}\}$, $\xi_2 = \sup\{\xi > 0 : \varphi_g(\xi) \ge \frac{t}{T}\}$. Перейдем к основному результату статьи.

Теорема 2. *Пусть функция $g(x)$ является l-дифференцируемой и удовлетворяет условию (4), а $\frac{t}{T} = \theta \in (0;1)$. Числа $\xi_1(\theta)$ и $\xi_2(\theta)$ являются корнями уравнения $\varphi_g(\xi) = \theta$.*

Доказательство. Докажем утверждение для ξ_1, для ξ_2 доказывается аналогично. Обозначим $s = \xi_1(\theta) + \varepsilon$. Для $x = x_i \uparrow b$ и $\forall t < x$ имеем $\frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)} \le \sup\limits_{t<x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)} \le s g_l'(x)$. Умножая левую и правую части этого неравенства, выписанного для $t = t_x$, на $(l(x) - l(t)) > 0$, получим $g(t_x) + s g_l'(x)(l(x) - l(t)) > \theta g(x)$. Разделив обе части на $g(x)$ и взяв верхний предел, получим $\varphi_g(\xi_1(\theta) + \varepsilon) \ge \theta$. С другой стороны, если $\rho = \xi_1(\theta) - \varepsilon > 0$, тогда для $\forall x > x_i$ с некоторым $\eta_x < x$ выполняется $\sup\limits_{t<x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)} = \frac{g(\eta_x) - \theta g(x)}{l(\eta_x) - l(x)} > \rho g_l'(x)$, отсюда для $t_x = \sup\{t : g_l'(t) \le \rho g_l'(x)\}$ получим $g(t_x) + \rho g_l'(x)(l(x) - l(t_x)) \le g(\eta_x) + \rho g_l'(x)(l(x) - l(\eta_x))$. Поделив это неравенство на $g(x)$ и взяв верхний предел, получим неравенство $\varphi_g(\xi_1(\theta) - \varepsilon) \le \theta$. Таким образом, имеем:

$$\varphi_g(\xi_1(\theta) - \varepsilon) \le \theta \le \varphi_g(\xi_1(\theta) + \varepsilon). \tag{6}$$

Устремляя ε к 0 в (6), получаем:

$$\varphi_g(\xi_1(\theta)-0)\le\theta\le\varphi_g(\xi_1(\theta)+0)\,. \qquad (6^*)$$

Отсюда, учитывая монотонность функции $\varphi_g(\xi)$, приходим к утверждению теоремы. Отметим, что в случае непрерывности $\varphi_g(\xi)$ в точке $\xi=\xi_1(\theta)$ имеем, очевидно, $\varphi_g(\xi_1(\theta))=\theta$, так что $\xi_1(\theta)$ является обычным (меньшим) корнем уравнения $\varphi_g(\xi)=\theta$.

Замечание. Теоремы 1 и 2 обобщают результаты Братищева А.В. и Брайчева Г.Г. на случай l-выпуклости и l-дифференцируемости функций. Кроме того, даже для обычных понятий выпуклости и дифференцируемости функций, ослаблено одно из условий теоремы 2 соответствующих случаю $l(x)=x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брайчев Г.Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. – М.: Прометей, 2005. 232 с.
2. *Братищев А.В.* Базисы Кете, целые функции и их приложения. Докт. дис. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1998, 248 с.
3. *Ягудина С.Ф.* Об обращении правила Лопиталя для l-выпуклых функций. Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование.-М.:МПГУ, 2010, 439 с.
4. *Constantin P.* Niculescu, Florin Popovici The extension of majorization inequalities within the framework of relative convexity [Электронный ресурс] // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Volume 7, Issue 1, Article 27, 2006. URL: http://jipam.vu.edu.au
5. Szymon Wasowicz Support-type properties of convex functions of higher order and hadamard-type inequalities// Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332 (2), 2007, p. 1229–1241

THE ROOTS OF AN EQUATION FROM THE THEORY OF GROWTH OF CONVEX FUNCTIONS

S. Yagudina

The Moscow Pedagogical State University
1, Malaya Pirogovskaya st., Moscow, 119991, Russia

Abstract. We prove the formula for the roots, which give estimates of the relative growth of convex functions in Tauberian theorems.

Keywords: convexity, l-convex, l-differentiability, relative growth, Abelian and Tauberian theorems.