УДК 517.547.2

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБРАТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С НУЛЯМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В РЯД ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

В.Б. Шерстюков, Е.В. Сумин, М.М. Тищенко

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. В работе изучается вопрос о разложении обратной величины целой функции экспоненциального типа с простыми нулями, расположенными в некоторой полуплоскости, в ряд простейших дробей. Основной результат статьи служит развитием известной теоремы М. Г. Крейна о свойствах целой функции с простыми вещественными нулями, обратная величина которой допускает разложение на простые дроби. Возможности полученного результата демонстрируются на конкретных примерах. Первый из них есть преобразование Лапласа, взятое на конечном промежутке с убывающим на нем оригиналом. Второй – регулярно встречающийся в анализе и теории вероятности интеграл ошибок.

Ключевые слова: целая функция, простейшая дробь, ряд Крейна, преобразование Лапласа, интеграл ошибок.

История вопроса о представлении мероморфных функций рядами простых дробей подробно освещена в статьях [5] – [7] . Сейчас напомним только, что известная работа М. Г. Крейна [1] породила проблему описания тех целых функций $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n, которые при фиксированном $p \in \mathbb{Z}_+$ допускают представление вида

$$\frac{1}{L(\lambda)} = Q(\lambda) + \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\lambda_n^p\left(\lambda - \lambda_n\right)}, \tag{1}$$

где $Q(\lambda)$ – некоторый многочлен и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} < \infty . \tag{2}$$

В [7] эта проблема решена одним из авторов для случая, когда $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ умещается в некоторой полосе комплексной плоскости. Теперь, привлекая идеи и методы [7], мы дадим новые достаточные условия на функцию $L(\lambda)$, обеспечивающие возможность разложить $1/L(\lambda)$ в ряд Крейна (1). При этом множество Λ всех (простых) нулей функции $L(\lambda)$ может находиться в некоторой полуплоскости, что особенно важно для приложений. Полученный результат служит развитием предшествующих исследований [5] – [7] и обсуждался на научном семинаре кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ».

Будем использовать стандартные определения и факты из теории целых функций, которые можно найти, например, в [2]. Последовательность нулей λ_n, составляющих

Λ, выписывается обычно в порядке возрастания модулей. Символ $h_L(\theta)$ означает индикатор целой функции экспоненциального типа (ЦФЭТ) $L(\lambda)$, а D_L – её индикаторную диаграмму. Рассмотрим сначала функцию $L(\lambda)$, у которой индикаторная диаграмма D_L есть отрезок $[-a;b]$, $a>0$, $b\geq 0$, или, что эквивалентно, индикатор при всех θ вычисляется по правилу $h_L(\theta)=\dfrac{a+b}{2}\,|\cos\theta|-\dfrac{a-b}{2}\cos\theta$. Относительно нулей функции $L(\lambda)$ предположим выполненными условия:

(α) множество $\Lambda=(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ правильно распределено;

(β) $\exists\, d>0$: $|\lambda_m-\lambda_n|\geq d \quad \forall m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n$.

Первое из условий равносильно полной регулярности роста ЦФЭТ $L(\lambda)$ и означает одновременное существование угловой плотности последовательности Λ и предела $\lim\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{|\lambda_n|\leq r}\dfrac{1}{\lambda_n}$ (подробности см. в [2, 122]). Условие (β) есть стандартное требование отделимости нулей. Таким образом, в соответствии с общим определением из [2, 126] мы имеем дело с регулярным множеством Λ.

Основной результат статьи заключён в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $L(\lambda)$ *– ЦФЭТ с множеством простых нулей* $\Lambda=(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, *расположенным в полуплоскости* $\{\lambda\in\mathbb{C}: Re\lambda\geq c\}$, $c>0$, *и удовлетворяющим условиям* (α), (β). *Пусть индикаторная диаграмма* D_L *есть отрезок* $[-a;b]$, *где* $a>0$, $b\geq 0$. *Пусть, наконец, при некотором* $p\in\mathbb{Z}_+$ *выполняется условие* (2). *Тогда справедливо сходящееся абсолютно и равномерно на любом компакте в области* $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ *разложение* (1), *где* $Q(\lambda)\equiv 0$, *если* $p=0$, *и* $Q(\lambda)=\sum\limits_{m=0}^{p-1}\left(\dfrac{1}{L(\lambda)}\right)^{(m)}(0)\cdot\dfrac{\lambda^m}{m!}$, *если* $p\in\mathbb{N}$.

Приведем схему доказательства для $p=0$. В условиях теоремы 1 будем доказывать, что свойство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|}<\infty, \qquad (3)$$

влечёт представление:

$$\frac{1}{L(\lambda)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\backslash\Lambda. \qquad (4)$$

Пусть вначале $b>0$. Рассмотрим разность:

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{L(\lambda)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi(\lambda)$ является целой функцией не выше экспоненциального типа. Покажем, что $\varphi(\lambda)\equiv 0$. Для этого оценим сверху $|\varphi(\lambda)|$ на вещественной и мнимой прямых. Так как множество Λ предполагается регулярным, то найдётся исключительное множество непересекающихся кружков U_n с центрами в точках λ_n, такое, что вне $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ выполнена оценка:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists A>0:\quad |L(\lambda)|>A\,\exp\{(h_L(\arg\lambda)-\varepsilon)\,|\lambda|\}.$$

Полагая$S=\mathbb{R}\backslash U$, из этой оценки и того, что $h_L(0)=b>0$, $h_L(\pi)=a>0$, находим

$$\frac{1}{L(x)}\to 0\quad\text{при}\quad x\to\pm\infty,\quad x\in S. \tag{5}$$

Учитывая (3) и (5), можно получить оценку:

$$|\varphi(x)|\le B\cdot|x|\,, \tag{6}$$

справедливую при некотором $B>0$ для $x\in S$. Теперь запишем вытекающее из определения $\varphi(\lambda)$ тождество

$$\varphi(\lambda)\,L(\lambda)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)},\qquad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{7}$$

Левая часть в (7) имеет индикатор $h_\varphi(\theta)+h_L(\theta)$, ибо $L(\lambda)$ обладает полной регулярностью роста [2, 207]. Индикатор же правой части в (7) при $\theta=\pm\pi/2$ не превосходит $\max\{0;h_L(\pm\pi/2)\}=0$, так как нули λ_n отделены от мнимой оси. Но тогда из (7) получаем

$$h_\varphi(\pm\pi/2)\le 0. \tag{8}$$

Применяя подходящую версию принципа Фрагмена-Линделефа, из (6) и (8) можно вывести, что $\varphi(\lambda)$ – линейная функция. Расположение последовательности Λ дает возможность уточнить оценку (6) при отрицательных значениях x. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|x-\lambda_n|}\to 0,\qquad x\to-\infty, \tag{9}$$

поэтому из (5) и (9) заключаем, что $\varphi(x)\to 0$ при $x\to-\infty$, а это для линейной функции может выполняться, только если она есть тождественный нуль. Итак, при $b>0$ разложение (4) обосновано. Если же $b=0$, то ситуация сводится к рассмотренной путем умножения $L(\lambda)$ на функцию $e^{\varepsilon\lambda}$ с фиксированным $\varepsilon\in(0;a)$ и последующим переходом к пределу при $\varepsilon\to+0$.

Схема доказательства для $p=0$ приведена. Общее утверждение для $p\ge 1$ получается индукцией по параметру p аналогично тому, как это делается в [7]. Ввиду громоздкости полное рассуждение, учитывающее все случаи, предполагается изложить отдельно.

Замечание. Ограничение $c > 0$ понадобилось при выводе из (7) оценки (8), когда потребовалась отделимость нулей от мнимой оси. С помощью дополнительных усилий от этого ограничения можно освободиться, и теорема 1 останется справедливой при расположении нулей в любой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda \geq c\}$ если при этом $0 \notin \Lambda$. Если же $\lambda = 0$ есть нуль $L(\lambda)$, то вид разложения (1) несколько изменится.

Продемонстрируем возможности теоремы 1 на конкретных примерах. Рассмотрим преобразование Лапласа, взятое на конечном промежутке с убывающим на нем оригиналом. Конкретно

$$L(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda s} \frac{ds}{\sqrt{s}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (10)$$

Начиная с классических работ Полиа и Титчмарша, функции такого рода активно изучаются в анализе. Интересные применения подобным функциям в теории дифференциальных уравнений найдены в цикле работ И.В.Тихонова, подытоженном в диссертации [4]. Функция (10) является ЦФЭТ с индикатором $h_L(\theta) = \frac{1}{2}\left(\left|\cos\theta\right| + \cos\theta\right)$ (см., например, [8]). В работе [3] А.М.Седлецкий показал, что нули функции $L(\lambda)$ расположены в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda > 1/2\}$. Все эти нули являются простыми, попарно комплексно сопряженными, и их можно записать в виде $(\mu_k)_{k=1}^{\infty} \bigcup (\overline{\mu}_k)_{k=1}^{\infty}$, где

$$\mu_k = \ln(\pi\sqrt{2k}) + i\left(2\pi k - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{\ln k}{k}\right), \qquad k \to \infty. \qquad (11)$$

Из асимптотики (11) находим, что $\arg\mu_k \to \frac{\pi}{2}$ и $\frac{k}{|\mu_k|} \to \frac{1}{2\pi}$ при $k \to \infty$. Кроме того, существует предел:

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{|\mu_k| \leq r} \left(\frac{1}{\mu_k} + \frac{1}{\overline{\mu}_k}\right) = \lim_{r\to\infty} \sum_{|\mu_k| \leq r} \frac{2\operatorname{Re}\mu_k}{|\mu_k|^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\mu_k}{|\mu_k|^2} < \infty.$$

Сочетание последних условий означает правильную распределенность множества нулей функции (10). Отделимость нулей вытекает непосредственно из (11). Располагая нули в порядке возрастания модулей по правилу $\lambda_{2k-1} = \mu_k$, $\lambda_{2k} = \overline{\mu}_k$, $k \in \mathbb{N}$, получим множество $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющее условиям (α) , (β). Из формулы (11) следуют асимптотики:

$$|\lambda_n| \sim \pi n, \quad \operatorname{Re}\lambda_n = \frac{1}{2}\ln|\lambda_n| + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \qquad n \to \infty. \qquad (12)$$

Мы собираемся разложить величину, обратную интегралу (10), в ряд простых дробей. Сложность состоит в том, что индикаторная диаграмма D_L представляет собой отрезок $[0; 1]$, т.е. $a = 0$, $b = 1$, и теорема 1 напрямую неприменима. Однако благодаря асимптотике (11) эту трудность удаётся преодолеть, вводя «подправленную» функцию

$L_\varepsilon(\lambda) = L(\lambda)e^{-\varepsilon\lambda}$, $\varepsilon \in (0;1)$, с тем же нулевым множеством Λ, что у $L(\lambda)$, но с индикаторной диаграммой в виде отрезка $[-\varepsilon;\ 1-\varepsilon]$. После несложных вычислений находим

$$L'_\varepsilon(\lambda_n) = L'(\lambda_n)e^{-\varepsilon\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n}e^{(1-\varepsilon)\lambda_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из (12) получаем:

$$\exists C > 0: \ \frac{1}{\left|L'_\varepsilon(\lambda_n)\right|\left|\lambda_n\right|^2} \le \frac{C}{\left|\lambda_n\right|^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}, \qquad n \to \infty, \tag{13}$$

где C не зависит от ε. Таким образом, $L_\varepsilon(\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $p=1$. Применяя эту теорему и находя:

$$Q(\lambda) \equiv \frac{1}{L_\varepsilon(0)} = \left(\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}}\right)^{-1} = \frac{1}{2},$$

Запишем:

$$\frac{1}{L_\varepsilon(\lambda)} = \frac{1}{2} + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L'_\varepsilon(\lambda_n)\lambda_n(\lambda-\lambda_n)} = \frac{1}{2} + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(1-\varepsilon)\lambda_n}}{\lambda-\lambda_n}.$$

Основываясь на (13), можно устремить ε к $+0$ и получить:

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{2} + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda-\lambda_n} = \frac{1}{2} + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-\mu_k}}{\lambda-\mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda-\bar{\mu}_k}\right].$$

Теорема 2. *Функция* (10) *допускает представление:*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{2} + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-\mu_k}}{\lambda-\mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda-\bar{\mu}_k}\right].$$

Здесь μ_k – *нули функции* (10)*, принадлежащие верхней полуплоскости, с асимптотикой* (11)*, а* $\bar{\mu}_k$ – *комплексно сопряженные нули в нижней полуплоскости. Ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек* μ_k *и* $\bar{\mu}_k$.

Теперь рассмотрим часто возникающий в различных разделах математики интеграл ошибок:

$$\operatorname{erf}\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda} e^{-t^2}dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Функция (14) является целой функцией порядка 2 с простыми нулями, так как ее производная $(2/\sqrt{\pi})e^{-\lambda^2}$ нигде не обращается в нуль. Значение $\lambda = 0$ дает единственный вещественный нуль, остальные нетривиальные нули являются комплексными. Непосредственно к функции (14) теорему 1 применить нельзя, хотя бы потому, что $\operatorname{erf}\lambda$ не является функцией экспоненциального типа. Воспользуемся элементарным соотношением, связывающим интеграл ошибок с функцией (10):

$$\operatorname{erf}\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} L(-\lambda^2), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

Отсюда ясно, что все нетривиальные нули функции (14) получаются как решения уравнений $\lambda^2 = -\mu_k$ и $\lambda^2 = -\bar{\mu}_k$, где μ_k и $\bar{\mu}_k$ – нули функции (10). Нетрудно видеть, что нетривиальные нули функции (14) можно организовать в две цепочки λ_m^+, λ_m^-, $m \in \mathbb{Z}\{0\}$, симметричные друг другу относительно вещественной оси и расположенные в гиперболических секторах $\{\lambda \in \mathbb{C}: (\mathrm{Im}\lambda)^2 - (\mathrm{Re}\lambda)^2 > 1/2\}$ (см. [3]). Применяя теорему 2, с учетом формулы (15) находим:

$$\frac{1}{\operatorname{erf}\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda L(-\lambda^2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\left(\frac{1}{2} + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-\mu_k}}{\lambda^2+\mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda^2+\bar{\mu}_k}\right]\right).$$

Сформулируем полученное утверждение.

Теорема 3. *Справедливо разложение в ряд:*

$$\frac{1}{\operatorname{erf}\lambda} = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-\mu_k}}{\lambda^2+\mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda^2+\bar{\mu}_k}\right]\right),$$

где значения μ_k, $\bar{\mu}_k$ *те же, что и в теореме* 2. *Ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах плоскости, не содержащих нулей функции ошибок.*

Отметим в заключение, что установленные в статье результаты удобно использовать при нахождении оценок снизу модуля целой функции вне некоторого исключительного множества, содержащего корни данной функции.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (проект 2.1.1/6827), проектов ГК Рособразование П 268, 795, 943 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 2009 – 2013 гг., П 1109.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М.Г.* К теории целых функций экспоненциального типа [Текст] // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. № 4. С. 309-326.
2. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций [Текст]. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
3. *Седлецкий А.М.* О нулях функции типа Миттаг-Леффлера [Текст] // Матем. заметки. 2000. Т. 68. Вып. 5. С. 710-724.
4. *Тихонов И.В.* Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений [Текст]: дис. … докт. физ.-мат. наук. М., 2008. 283 с.

5. *Шерстюков В.Б.* О разложении мероморфных функций специального вида на простейшие дроби [Текст] // Analysis Mathematica. 2007. Т. 33. С. 63-81.
6. *Шерстюков В.Б.* Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация [Текст] // Матем. сборник. 2009. Т. 200. № 3. С. 147-160.
7. *Шерстюков В.Б.* Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна [Текст] // Матем. сборник. 2011 (принята к печати).
8. *Titchmarsh E.C.* The zeros of certain integral functions [Text] // Proc. London Math. Soc. 1926. V. 25. Part 4. P. 283-302.

EXPANSION OF THE RECIPROCAL OF AN ENTIRE FUNCTION WITH ZEROS IN THE HALF-PLANE IN A SERIES OF PARTIAL FRACTIONS

V. Sherstyukov, E. Sumin, M. Tishchenko

National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. We study the problem of expanding the reciprocal of an entire function of exponential type with simple zeros located at a half-plane in a series of partial fractions. Our main result is the development of a theorem of M. G. Krein on the properties of an entire function with simple real zeros, the inverse of which can be decomposed into simple fractions. These results demonstrate the possibility of using specific examples. The first of these is the Laplace transform, taken in a finite interval with decreasing it original. Second - regularly encountered in the analysis and probability errors integral.
Keywords: entire function, partial fraction, Krein's series, Laplace transform, errors integral.

УДК 517.5

О КОРНЯХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РОСТА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

С.Ф. Ягудина

Московский педагогический государственный университет
119991, Москва, ул. Малая Пироговская, д.1, стр.1

Аннотация. Для уточнения асимптотического поведения функций в конечной точке или на бесконечности удобно применять правило Бернулли-Лопиталя, в котором поведение отношения функций определяется с помощью отношения их производных. Однако не все функции дифференцируемы, поэтому актуальным является обобщение понятия производной таким образом, чтобы новое более широкое понятие сохранило свойства классической производной, а также было применимо к изучению относительного роста не дифференцируемых функций. Одно из таких обобщений рассматривается в данной работе. В ней также доказываются формулы для корней уравнения, дающих оценки относительного роста выпуклых функций в