

УДК 517.95

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА

Д.Г. Орловский, В.Е. Волков, В.М. Простокишин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Доказана дифференцируемость обобщенного решения обратной задачи для уравнения Максвелла-Больцмана, описывающего поведение распределения электронной компоненты разряженной плазмы в ограниченной области трехмерного пространства. Поставленная обратная задача исследуется с точки зрения абстрактных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с точки зрения полугруппового подхода. Задача по определению функции источника редуцируется к интегральному уравнению Вольтера второго рода, которое расширяется до системы, содержащей уравнение с производной. Исследование этой системы позволяет получить условие дифференцируемости решения обратной задачи для исходного уравнения Максвелла-Больцмана.

Ключевые слова: обратная задача, функция источника, уравнение Максвелла-Больцмана, банахово пространство, полугруппа.

В ограниченной области Ω с гладкой границей рассмотрим уравнение Максвелла-Больцмана

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v, \nabla_x u) + (a, \nabla_v u) = \int_{R^3} K(x, v, v') u(x, v', t) dv' - v(x, v) u + F(x, v, t), \quad (1)$$

$$\text{где } a(x, v) = \frac{e}{m} (E(x) + \frac{1}{c} [v, B(x)]). \quad (2)$$

С точки зрения приложений уравнение описывает поведение распределения электронной компоненты плазмы, занимающей область Ω . Величины e и m имеют соответственно смысл заряда и массы электрона, c – скорость света, а вектор-функции $E(x)$ и $B(x)$ представляют собой напряженность электрического и индукцию магнитного полей, функция $v(x, v)$ носит название частоты столкновений. Помимо уравнения необходимо задать также начальные и граничные данные

$$u(x, v, 0) = u_0(x, v), \quad x \in \Omega, \quad v \in R^3, \quad (3)$$

$$u(x, v, 0) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (v, n_x) < 0, \quad (4)$$

где n_x – единичная внешняя нормаль к границе области в точке x .

Предположим, что в уравнении функция F неизвестна, но имеет следующую структуру:

$$F(x, v, t) = f(x, v, t) h(t) + g(x, v, t), \quad (5)$$

причем функции f и g известны. Для определения неизвестной функции h рассмотрим дополнительное условие:

$$\int_{\Omega \times R^3} f(x, v, t) \omega(x, v) dx dv = \varphi(t). \quad (6)$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти пару функций (u, h) , удовлетворяющих соотношениям (1) – (6). Поставленная задача относится к категории обратных задач и для данного уравнения она была впервые рассмотрена в работе [1], где было доказано существование и единственность слабого решения этой задачи. Здесь мы рассмотрим вопрос о дифференцируемости слабого решения данной обратной задачи.

Теорема. Пусть $E, B \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0 \in C^1(\Omega \times R^3)$, $u_0(x, v) = 0$ при $x \in \partial \Omega$, $(v, n_x) < 0$, функция v непрерывна и ограничена в $\Omega \times R^3$, функция ω непрерывно дифференцируема и финитна в $\Omega \times R^3$, функция $\varphi \in C^2[0; T]$, функции $f, g \in C^1[0; T]; L_p(\Omega \times R^3)$ ($p > 1$), конечны величины:

$$c_1 = \sup_{x, v} \int_{\Omega \times R^3} |K(x, v, v')| dv', \quad (7)$$

$$c_2 = \sup_{x, v'} \int_{\Omega \times R^3} |K(x, v, v')| dv.$$

выполнено условие согласования:

$$\int_{\Omega \times R^3} u_0(x, v) \omega(x, v) dx dv = \varphi(0) \quad (8)$$

и, кроме того, при всех $t \in [0; T]$

$$\int_{\Omega \times R^3} f(x, v, t) \omega(x, v) dx dv \neq 0 \quad (9)$$

Тогда решение обратной задачи существует и единственно в классе $u \in C^1([0; T]; L_p(\Omega \times R^3))$, $h \in C^1[0; T]$.

Приведем схему доказательства. В работе [1] показано, что задача (1) – (6) сводится к абстрактной обратной задаче:

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + \Phi(t)h(t) + g(t), \\ u(0) &= u_0, \\ Lu(t) &= \varphi(t) \end{aligned}$$

с оператором A , являющимся генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы $V(t)$ в банаховом пространстве $X = L_p(\Omega \times R^3)$, а функция $h(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтера второго рода с непрерывным неоднородным членом и непрерывным ядром. При сделанных предположениях (7) – (9) это уравнение удастся

расширить до системы интегральных уравнений, содержащих саму неизвестную функцию $h(t)$ и ее производную $H(t)=h'(t)$

$$h(t) = h_0(t) + \int_0^t K(t,s)h(s)ds,$$
$$H(t) = H_0(t) + \int_0^t K_1(t,s)h(s)ds + \int_0^t K(t,s)H(s)ds.$$

Полученная система имеет непрерывные неоднородные члены $h_0(t)$, $H_0(t)$ и непрерывные ядра $K(t,s)$ и $K_1(t,s)$. Отсюда следует существование и единственность решения этой системы. Более того, методом последовательных приближений доказывается, что функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет равенству $h'(t)=H(t)$. Дифференцируемость функции $u(t)$ следует из дифференцируемости правой части абстрактного дифференциального уравнения, которое, в свою очередь, следует из дифференцируемости функции $h(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орловский Д.Г. Об одной обратной задаче для уравнения Максвелла – Больцмана // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и Физика. 2009. 2(3). С. 3428 - 3436.

ABOUT SMOOTHNESS OF THE SOLUTION OF SOME INVERSE PROBLEM FOR MAXWELL-BOLTZMANN EQUATION

D. Orlovsky, V. Volkov, V. Prostokishin

*National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia*

Abstract. Proved differentiability of weak solution of inverse problem for Maxwell-Boltzmann equation which describes the distribution of electronic component discharged plasma in bounded domain of three-dimensional space. This inverse problem is investigated in terms of abstract differential equations in a Banach spaces from the viewpoint of semigroup theory. The task of determining the source function reduces to an integral equation of Volterra of the second kind. This equation is extended to a system of equations with an equation with the derivative. The study of this system allows us to obtain the condition of differentiability of the inverse problem for the original Maxwell-Boltzmann's equation.

Keywords: inverse problem, source function, Maxwell-Boltzmann equation, Banach space, semigroup.