7. *Гусев А.Н.* Информационная технология сопровождения многомерных объектов: идентификация, прогнозирование, оптимизация, управление, обеспечение качества. М.: МГОУ, 2010, 361 с.

SYNTHESIS OF N-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL FOR EXPERIMENTAL DATA OBJECT AS A RATIONAL FRACTION

A. Gusev

Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. This article discusses options for approximation of functions of rational fractions. Here are shown the advantages and restrictions of approximation of Pade for approximation of analytically set differentiated functions. Transformation of universal topological model based on experimental data on the characteristics of a n-dimensional object received good approximation of rational fraction. The order of polynoms of numerator and denominator of rational fraction is defined. Structure of rational fraction object allows you to analyze sustainability, defining a zero denominator polynomial.
Keywords: Pade approximation, rational fraction, polynomial, multidimensional object, topological invariants, sustainability.

УДК 514.77 + 512.54 + 517.91

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.А. МАТВЕЕВ*, А.В. ПАНШИНА**

**Московский государственный областной университет,*
105005, Москва, ул. Радио, 10а

***Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5

Аннотация. Многообразиям аффинной связности и их обобщениям – многообразиям с траекториями сопоставляются широкие классы систем обыкновенных дифференциальных уравнений, свойства решений которых, в результате предлагаемой конструкции, получают точное дифференциально-геометрическое и алгебраическое описание. Выделяются случаи локально симметрических и плоских (абелевых) систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты используются для исследования Лагранжевых механических систем.
Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений, механические системы, аффинная связность, квазигруппа.

1. Введение.

Общепризнанно плодотворное взаимодействие классической дифференциальной геометрии и аналитической механики, в частности очень интересна, на наш взгляд, связь между локально симметрическими пространствами Эли Картана и интегрируемыми гамильтоновыми дифференциальными уравнениями [1]-[3]. Напомним, что дифференцируемое многообразие аффинной связности называется локально симметрическим, если его поле кручения T равно нулю, и первая ковариантная производная тензорного поля кривизны также равна нулю. Симметрические пространства, введенные Эли Картаном, обладают математически красивыми алгебраическими свойствами, геодезические симметрии относительно каждой точки являются локальными изоморфизмами аффинной связности. Симметрические многообразия прочно вошли в современную математику. Ввиду богатства топологической и алгебраической структуры эти пространства являются удобным материалом, на котором проверяется эффективность многих современных математических методов. Самые разнообразные вопросы из дифференциальной геометрии, теории групп, дифференциальных уравнений, аналитической механики, теоретической физики часто сводятся к тем или иным задачам на симметрических пространствах. Известно (О. Лоос. Симметрические пространства.), что симметрическое пространство может рассматриваться, как гладкая идемпотентная леводистрибутивная квазигруппа с «тождеством ключей». Левые сдвиги этой квазигруппы и есть геодезические симметрии. Позднее этот результат был обобщен. Свойства геодезических линий симметрических пространств подробно и глубоко изучены и обобщаются на траектории механических систем широкого класса. Некоторые результаты в этом направлении представлены в работах [4]–[11].

Выявляется роль, которую играют такие алгебраические структуры, как квазигруппы, в исследовании и описании геометрических свойств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих Лагранжевы механические системы. В конструкции задействована алгебраическая теория пространств аффинной связности. Используется понятие многообразия с геодезическими - точного алгебраического аналога аффинно-связного многообразия с нулевым тензорным полем кручения. Устанавливается, что решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка представляют собой многообразия с траекториями, обобщающими многообразия с геодезическими.

Произвольному пространству аффинной связности можно сопоставить однопараметрическое семейство локальных идемпотентных эластичных квазигрупп, определяемых каноническим (аффинным) параметром вдоль геодезических линий. Было введено новое понятие - пространство с геодезическими, как алгебра с однопараметрическим семейством бинарных операций, связанных определенными тождествами. Было установлено взаимно однозначное соответствие между гладкими многообразиями с геодезическими и аффинно-связными многообразиями с нулевым тензором кручения. Таким образом, был построен алгебраический эквивалент экспоненциального отображения. Этот результат был достигнут в связи с переводом на алгебраический язык теории геодезических отображений пространств аффинной связности.

С алгебраической точки зрения многообразие с траекториями представляет собой трёхпараметрическое семейство локальных гладких квазигрупп, операции умножения которых связаны определенными тождествами. Некоторые специальные геометрические свойства траекторий механической системы выражаются дополнительными тождествами соответствующей алгебраической системы. Исследование опирается на алгебраическую теорию симметрических и абелевых (плоских) аффинно-связных пространств. Локально симметрическим и локально плоским многообразиям аффинной связности сопоставляются широкие классы Лагранжевых механических систем, которые в результате предлагаемой конструкции получают точное дифференциально-геометрическое и алгебраическое описание. Исследованы примеры, подтверждающие корректность построенной теории. Результаты, полученные в этом направлении, опубликованы в работах [4]–[11].

В связи с локально симметрическими и локально плоскими многообразиями аффинной связности рассматриваются механические системы. Устанавливается, что механические системы широкого класса представляют собой многообразия с траекториями, приводится точное описание класса локально симметрических и абелевых механических систем в дифференциально–геометрических терминах.

2. Многообразия с траекториями.

Определение 2.1. Пусть M - гладкое (дифференцируемое) действительное многообразие и $\varphi :\ R^3 \times M^2 \to M$,

$\varphi(t,u,v,x,y) = \psi(t,u,v)(x,y) = (t,u,v)_x\, y \in M \quad (x, y \in M,\ t,u,v \in R)$ - частичное гладкое локальное отображение.

Для фиксированных действительных чисел t_o, u_o, v_o $(u_o \neq v_o)$ отображение φ определяет частичную гладкую локальную бинарную операцию $\psi_{(t_o,u_o,v_o)}(x,y) = (t_o,u_o,v_o)_x\, y$, где $x, y \in M$. Частичная гладкая локальная алгебра $\mathcal{M}=\langle M,(\psi_\tau)_{\tau\in R^3}\rangle$ называется многообразием с траекториями, если выполняются следующие условия:

a) для любой точки x из M и для достаточно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность U_x, такая что $(t,u,v)_y\, z$ определено и принадлежит U_x для $y, x \in U_x$, $0<|u-v|<\varepsilon$, $t \in I$, где I – связный открытый действительный интервал, содержащий $[u,v]$, если $v > u$, или $[v,u] \subset I$ при $v < u$;

b) Локально выполняются следующие тождества:

$$(t,u,v)_x (v,u,w)_x\, y = (t,u,w)_x\, y,\quad u \neq v,\ u \neq w; \tag{2.1}$$
$$(t,u,v)_x\, y = (t,v,u)_y\, x,\quad u \neq v; \tag{2.2}$$
$$(t,u,t)_x\, y = y,\quad u \neq v; \tag{2.3}$$

где $x, y \in M$, $t,u,v \in R$.

При фиксированных u,v $(u \neq v)$ множество точек $\{(t,u,v)_x\, y\}_{t\in I}$ можно рассматривать как траекторию, выходящую из точки x при $t = u$ и входящую в точку y при $t = v$.

Предложение 2.1. Пусть $\mathcal{M}=\langle M,(\psi_\tau)_{\tau\in R^3}\rangle$ частичное гладкое локальное многообразие с траекториями. Тогда локально выполняются следующие тождества:

$$(t,t,u)_x\, y = x,\quad t \neq u; \tag{2.4}$$
$$(t,\alpha,\beta)_{(\alpha,u,v)_x y} (\beta,u,v)_x\, y = (t,u,v)_x\, y, \tag{2.5}$$
$$\alpha \neq \beta,\ u \neq v;\ t,u,v,\alpha,\beta \in R;\ x, y \in M\ .$$

Доказательство. Докажем (2.4). Используя (2.2) и (2.3) имеем

$$(t,t,u)_x y \overset{(2.2)}{=} (t,u,t)_y x \overset{(2.3)}{=} x.$$

Теперь, положив $a=(\alpha,u,v)_x y$, имеем

$$(v,u,\alpha)_x a=(v,u,\alpha)_x(\alpha,u,v)_x y \overset{(2.1)}{=} (v,u,v)_x y \overset{(2.3)}{=} y\,.$$

Т.к. $y=(v,u,\alpha)_x a$, то получим:

$$(t,\alpha,\beta)_{(\alpha,u,v)_x y}(\beta,u,v)_x y=(t,a,\beta)_{(\alpha,u,v)_x y}(\beta,u,v)_x(v,u,\alpha)_x a \overset{(2.1)}{=}$$

$$=(t,\alpha,\beta)_{(\alpha,u,v)_x y}(\beta,u,\alpha)_x a=(t,\alpha,\beta)_\alpha(\beta,u,\alpha)_x a \overset{(2.2)}{=}$$

$$=(t,\alpha,\beta)_\alpha(\beta,\alpha,u)_a x \overset{(2.1)}{=} (t,\alpha,u)_\alpha x \overset{(2.2)}{=} (t,u,\alpha)_x a=$$

$$=(t,u,\alpha)_x(\alpha,u,v)_x y \overset{(2.1)}{=} (t,u,v)_x y.$$

Предложение 2.2. Пусть $\mathcal{M}=\langle M,(\psi_\tau)_{\tau\in R^3}\rangle$ - частичное гладкое локальное многообразие с траекториями. Тогда для некоторого фиксированного $\tau_o=(t_o,u_o,v_o)$, $u_o\neq v_o$, $t_o\neq u_o$, $t_o\neq v_o$ отображение $\psi_{(t_o,u_o,v_o)}:M\times M\to M$ определяет частичную гладкую локальную бинарную операцию $x\underset{(t_o,u_o,v_o)}{\cdot}y=\psi(t_o,u_o,v_o)(x,y)$, и алгебра $\langle M,\underset{(t_o,u_o,v_o)}{\cdot}\rangle$ есть частично гладкая локальная двусторонняя квазигруппа.

Доказательство. Возьмем действительные числа $t_o,u_o,v_o;\ u_o\neq v_o,\ \tau_o=(t_o,u_o,v_o),$ и определим правое $(\backslash_{\tau_o})$ и левое $({}_{\tau_o}/)$ деления формулами:

$$x\backslash_{\tau_o} z=(v_o,u_o,t_o)_x z,\ \ z/_{\tau_o} y=(u_o,v_o,t_o)_y z,\ \ x,y,z\in M. \qquad (2.6)$$

Теперь необходимо проверить следующие тождества:

$$x_{\dot\tau_o}(x\backslash_{\tau_o} z)=z, \qquad (z/_{\tau_o} y)_{\dot\tau_o} y=z.$$

В соответствии с (2.1)-(2.3) имеем:

$$x_{\dot\tau_o}(x\backslash_{\tau_o} z)=(t_o,u_o,v_o)_x(x\backslash_{\tau_o} z)=(t_o,u_o,v_o)_x(v_o,u_o,t_o)_x z \overset{(2.1)}{=}$$

$$=(t_o,u_o,t_o)_x z \overset{(2.3)}{=} z,$$

$$(z/_{\tau_o} y)_{\dot\tau_o} y=[(u_o,v_o,t_o)_y z]_{\dot\tau_o} y=(t_o,u_o,v_o)_{(u_o,v_o,t_o)_y x}y \overset{(2.2)}{=}$$

$$=(t_o,v_o,u_o)_y(u_o,v_o,t_o)_y z \overset{(2.1)}{=} (t_o,v_o,t_o)_y z \overset{(2.3)}{=} z.$$

Аналогично проверяются и тождества $x\backslash_{\tau_o}(x_{\dot\tau_o} y)=y$ и $(x_{\dot\tau_o} y)/_{\tau_o} y=x$.

Пример. Рассмотрим решения системы дифференциальных уравнений второго порядка на многообразии M (в локальной системе координат)

$$\ddot x^i=f^i(x,\dot x,t), \qquad i=\overline{1,n} \quad (\dot x^i=\frac{dx^i}{dt}). \qquad (2.7)$$

Пусть система (2.7) имеет (локально) единственную траекторию $x(t)=(t,u,v)_y z,\ \ x(u)=y,\ \ x(v)=z,$ выходящую из точки y при $t=u$, и приходящую в z при $t=v$. Пусть также выполнено условие а) из определения 2.1. Тогда приходим к многообразию с траекториями.

Некоторые свойства дифференциальных уравнений на множестве M можно охарактеризовать алгебраическими тождествами на многообразии с траекториями $\mathcal{M}$. Например, нетрудно показать, что верны предложения 2.3 и 2.4

Предложение 2.3. Пусть многообразие с траекториями $\mathcal{M}=\langle M,(\psi_\tau)_{\tau\in R^3}\rangle$ определено на M дифференциальными уравнениями второго порядка вида (2.7) в локальной системе координат. Тогда для некоторого $\tau_o=(t_o,u_o,v_o),\ t_o\neq u_o,\ u_o\neq v_o,\ v_o\neq t_o$, квазигруппа $\langle M,\dot{_{\tau_o}}\rangle$ идемпотентна, т.е.

$$x\,\dot{_{\tau_o}}\,x=(t_o,u_o,v_o)_x x=x \tag{2.8}$$

если $f^i(x,0,t)\equiv 0,\quad i=\overline{1,n}\quad (n=\dim M)$.

Предложение 2.4. Многообразие с траекториями $\mathcal{M}$ определено автономным дифференциальным уравнением второго порядка на M, имеющим в некоторой локальной системе координат следующий вид

$$\ddot{x}^i=g^i(x,\dot{x}),\quad i=\overline{1,n}\quad (n=\dim M), \tag{2.9}$$

если выполнено (локально) на $\mathcal{M}$ тождество:

$$(t,u,v)_x y=(t+w,u+w,v+w)_x y, \tag{2.10}$$

где $u\neq v;\ t,u,v,w\in R;\ x,y\in M$.

Предложение 2.5. Пусть $\mathcal{M}=\langle M,(\psi_\tau)_{\tau\in R^3}\rangle$ является частично гладким локальным многообразием с траекториями. Определим однопараметрическое семейство частично гладких локальных бинарных операций $\omega_r:\ (M\times R)\times(M\times R)\to M\times R$ следующей формулой:

$$\omega_r(\bar{x},\bar{y})=r_{\bar{x}}\bar{y}=[((\beta-\alpha)r+\alpha,\alpha,\beta)_x y,(\beta-\alpha)r+\alpha], \tag{2.11}$$

где $\bar{x},\bar{y}\in M\times R,\ \bar{x}=(x,\alpha),\ \bar{y}=(y,\beta),\ \alpha\neq\beta;\ r,\alpha,\beta\in R.$ (Если $\alpha=\beta$, то операция ω_r не определена.) Тогда $\Omega=\langle M\times R,(\omega_r)_{r\in R}\rangle$ есть частично гладкое локальное многообразие с геодезическими.

Определение 2.2. Частично гладкое локальное многообразие с траекториями $\mathcal{M}=\langle M,(\psi_\tau)_{\tau\in R^3}\rangle$ называется автономным, если тождество (2.10) локально выполнено на $\mathcal{M}$.

Предложение 2.6. Пусть $\mathcal{M}=\langle M,(\psi_\tau)_{\tau\in R^3}\rangle$ является частично гладким локальным автономным многообразием с траекториями. Определим двухпараметрическое семейство бинарных операций формулой:

$$\Theta(\alpha,\beta,x,y)=(\alpha,\beta)_x\,y=(t-u,0,v-u)_x\,y=\varphi(t-u,0,v-u,x,y), \tag{2.12}$$

где $\alpha=t-u,\ \beta=v-u,\ v\neq u,\ \beta\neq 0;\quad \alpha,\beta,t,u,v\in R,\quad x,y\in M.$

Тогда следующие тождества локально верны:

$$(\alpha,\beta)_x(\beta,\gamma)_x\,y=(\alpha,\gamma)_x\,y\ , \tag{2.13}$$

$$(\alpha,\beta)_x\,y=(\alpha-\beta,-\beta)_y\,x\ , \tag{2.14}$$

$$(\alpha,\alpha)_x\,y=y,\quad \alpha\neq 0 \tag{2.15}$$

где $\alpha,\beta,\gamma\in R,\quad \beta\neq 0,\ \gamma\neq 0;\ \ x,y\in M.$

Доказательство. Если тождество (2.10) локально выполнено, то формула (2.12) верна. Непосредственные вычисления показывают, что если использовать формулу (2.12), то тождества (2.13)-(2.15) следуют из (2.1)-(2.3).

Определение 2.3. Пусть M является гладким действительным многообразием и $\Theta:\ R^2\times M^2\to M,\ \ \Theta(\alpha,\beta,x,y)=\sigma(\alpha,\beta)(x,y)=(\alpha,\beta)_x\,y,\quad (x,y\in M;\alpha,\beta\in R,\beta\neq 0)$ есть частично гладкое локальное отображение. Θ определяет двухпараметрическое семейство частично гладких локальных бинарных операций:

$$\{\sigma_{(\alpha,\beta)}\}_{\alpha,\beta\in R}:\sigma_{(\alpha,\beta)}:M\times M\to M,\ \ \sigma_{(\alpha,\beta)}(x,y)=\sigma(\alpha,\beta)(x,y)=$$
$$=\Theta(\alpha,\beta,x,y)=(\alpha,\beta)_x\,y=x\underset{(\alpha,\beta)}{\cdot}y=x\cdot y,\quad v=(\alpha,\beta),\ \beta\neq 0.$$

Частично гладкая локальная алгебра $\mathcal{N}=\langle M,(\sigma_v)_{v\in R^2}\rangle$ называется автономным многообразием с траекториями, если выполнены следующие условия:

a) для любой точки x из $\mathcal{M}$ и для любого достаточно малого действительного числа $\varepsilon>0$ существует открытая окрестность U_x, такая, что точка $(\alpha,\beta)_y z$ определена и принадлежит U_x для $y,z\in U_x,\ 0<|\beta|<\varepsilon,\ \alpha\in I$, где I - связный открытый интервал, содержащий $[0,\beta]$, если $\beta>0$, или $[\beta,0]$, если $\beta<0$;

b) Тождества (2.13)-(2.15) локально выполнены.

Если действительное число $\beta\neq 0$ фиксировано, то множество точек $\{(\alpha,\beta)_x\,y\}_{\alpha\in I}$, называется траекторией, проходящей через точки $x\ (\alpha=0)$ и $y\ (\alpha=\beta)$.

Замечание. Предложение 2.6 показывает, что определение 2.3 согласовано с определением 2.2.

Следующие предложения 2.7 и 2.8 аналогичны предложениям 2.1 и 2. 2.

Предложение 2.7. Пусть $\mathcal{N}=\langle M,(\sigma_v)_{v\in R^2}\rangle$ есть частично гладкое локальное автономное многообразие с траекториями. Тогда следующие тождества локально верны:

$$(0,\beta)_x\,y=x\ , \tag{2.16}$$

$$(\delta,\gamma-\alpha)_{(\alpha,\beta)_x y}(\gamma,\beta)_x\,y=(\delta+\alpha,\beta)_x\,y, \tag{2.17}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R,\ \beta\neq 0,\alpha\neq\gamma;\ x,y\in M.$

Предложение 2.8. Пусть $\mathcal{N}=\langle M,(\sigma_\nu)_{\nu\in R^2}\rangle$ есть частично гладкое локальное автономное многообразие с траекториями. Тогда для некоторого фиксированного $\nu_o=(\alpha_o,\beta_o),\ \beta_o\neq 0,\ \alpha_o\neq\beta_o,\ \alpha_o\neq 0$ отображение

$$\sigma_{\nu_o}:M\times M\to M,\ \sigma_{\nu_o}(x,y)=\sigma(\alpha_o,\beta_o)(x,y)=(\alpha_o,\beta_o)_x\,y=x\dot{_{\nu_o}}\,y$$

определяет частично гладкую локальную бинарную операцию умножения "$\dot{\nu}_o$", и алгебра $\langle M,\dot{_{\nu_o}}\rangle$ является частично гладкой локальной двусторонней квазигруппой с правым $(\backslash_{\nu_o})$ и левым $(/_{\nu_o})$ делениями:

$$x\backslash_{\nu_o}y=(\beta_o,\alpha_o)_x\,y;\qquad x/_{\nu_o}y=(-\beta_o,\alpha-\beta_o)_y\,x,\qquad x,y\in M. \tag{2.18}$$

Предложение 2.9. Пусть $\mathcal{N}=\langle M,(\sigma_\nu)_{\nu\in R^2}\rangle$ есть частично гладкое локальное автономное многообразие с траекториями, определяемое автономным дифференциальным уравнением второго порядка, имеющим в некоторой локальной системе координат вид (2.9). Следующие тождества локально справедливы на $\mathcal{N}$:

$$(\alpha,\beta)_x\,y=(\beta-\alpha,\beta)_y\,x,\quad \beta\neq 0,\ \alpha,\beta\in R,\ \ x,y\in M, \tag{2.19}$$

если разрешимы уравнения:

$$g^i(x,\dot{x})=g^i(x,-\dot{x}),\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.20}$$

Замечание. Тождество (2.19) эквивалентно следующему тождеству (см. (2.14)):

$$(\alpha,\beta)_x\,y=(-\alpha,-\beta)_x\,y,\quad \beta\neq 0,\ \alpha,\beta\in R,\ \ x,y\in M. \tag{2.21}$$

Предложение 2.10. Пусть тождество

$$(\alpha,\beta)_x\,y=(\frac{\alpha}{\beta},1)_x\,y,\quad \beta\neq 0,\ \alpha,\beta\in R,\ \ x,y\in M \tag{2.22}$$

выполняется на частично гладком локальном автономном многообразии с траекториями $\mathcal{N}=\langle M,(\sigma_\nu)_{\nu\in R^2}\rangle$. Определим однопараметрическое семейство частично гладких локальных бинарных операций

$$\omega(t,x,y)=\omega_t(x,y)=t_x\,y=(t,1)_x\,y\,. \tag{2.23}$$

Тогда частично гладкая локальная алгебра $\Omega=\langle M,(\omega_t)_{t\in R}\rangle$ есть многообразие с геодезическими.

Доказательство имеет чисто алгебраический характер.

Определение 3. Многообразие с траекториями называется локально симметрическим, если присоединенное к нему многообразие с геодезическими является локально симметрическим (т.е. соответствует локально симметрической аффинной связности).

Определение 4. Многообразие с траекториями называется локально абелевым, если присоединенное к нему многообразие с геодезическими является локально плоским (т.е. соответствует локально плоской аффинной связности, у которой тензорные поля кривизны и кручения нулевые).

В локально абелевом многообразии аффинной связности локально выполняются следующие тождества (когда обе части равенства имеют смысл), однозначно характеризующие этот класс пространств

$$u_x\left(t_x y\right)=\left(ut\right)_x y\,, \tag{2.24}$$

$$t_x y=\left(1-t\right)_y x\,, \tag{2.25}$$

$$1_x y=y\,, \tag{2.26}$$

$$t_x\left(u_y z\right)=u_{t_x y}t_x z\,, \tag{2.27}$$

$$v_x\left(\frac{1}{v}\right)_y v_z a=v_z\left(\frac{1}{v}\right)_y v_x a\,, \tag{2.28}$$

где $1,u,t,v\in R$; $v\neq 0$, $x,y,z,a\in M$.

В локально симметрическом пространстве аффинной связности выполняются характеристические тождества (2.24)-(2.26), а также следующие тождества:

$$(-1)_{\mathbf{x}}(-1)_{t_x\mathbf{y}}\,a=(-1)_{t_y\mathbf{x}}(-1)_{\mathbf{y}}\,a \tag{2.29}$$

$$(-1)_x t_y\,z=t_{(-1)_x y}(-1)_x z \tag{2.30}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. 408 с.
2. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.:Факториал,1995. 448 с.
3. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
4. *Matveyev O.A., Panshina A.V.* Quasigroups on manifolds with trajectories//Webs and quasigroups. 1995. P. 88–105.
5. *Матвеев О.А., Паншина А.В*. Геометрия траекторий на многообразиях//Тезисы докладов. Международная научная конференция, Казань. 1992. Ч.1. С. 59–60.
6. *Матвеев О.А., Паншина А.В*. О приложениях геометрической квазигрупповой теории многообразий с траекториями к аналитической механике//Тезисы докладов. 34-я научная конференция факультета физико-математических и естественных наук. М.: РУДН, 1998. С. 31–32.
7. *Матвеев О.А., Паншина А.В.* Алгебраические и геометрические свойства траекторий абелевых и симметрических механических систем//Тезисы докладов. 36–я Всероссийская научная конференция, математические секции. М.: РУДН, 2000. С. 21–22.

8. *Матвеев О.А., Паншина А.В.* О локально симметрических и абелевых механических системах//Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания. Пенза. 2001. С. 62-68.
9. *Матвеев О.А., Матвеева Н.В., Паншина А.В.* О квазигрупповой теории абелевых и симметрических механических систем//Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 9. М.: Янус-К, 2006. С. 22 -24.
10. *Matveyev O.A.* On quasigroup theory of manifolds with trajectories//Webs and quasigroups. Tver, 2000. P. 129-139.
11. *Матвеев О.А.* Квазигрупповые свойства многообразий с траекториями//Вестник Московского педагогического университета. Математика-физика. 3-4, М. 1998. С. 10-15.

THE GEOMETRIC AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF THE SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERETIAL EQUATIONS

O. Matveyev*, A. Panshina**

**Moscow region state university*
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

***Bauman Moscow State Technical University*
5, 2-nd Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. Affinely connected manifolds and there generalizations are compared with the wild classes of systems of ordinary differential equations and their properties obtain the precise differential geometry and algebraic description. Local symmetric and flat (abelian) classes of systems of ordinary differential equations are discussed. The results are used for investigation of Lagranian mechanical systems.

Keywords: systems of ordinary differential equations, mechanical systems, affine connection, quasigroup.