УДК 517.518.84

СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОМЕРНОГО ОБЪЕКТА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ В ВИДЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ

А.Н. Гусев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. В статье рассматриваются варианты аппроксимации функций рациональными дробями. Показаны преимущества и ограничения аппроксимации Паде для аппроксимации аналитически заданных дифференцируемых функций. Преобразованием универсальной топологической модели, построенной на основе экспериментальных данных о параметрах многомерного объекта, получена рациональная аппроксимация рациональной дробью. Определен порядок полиномов числителя и знаменателя рациональной дроби. Структура рациональной дроби позволяет анализировать устойчивость объекта, определяя нули полинома знаменателя.

Ключевые слова: аппроксимация Паде, рациональная дробь, полином, многомерный объект, топологические инварианты, устойчивость.

Рациональные представления обладают значительными преимуществами в сравнении с полиномиальными. Рациональная дробь содержит два полинома (числителя и знаменателя), которые объединены операцией деления. Такое отличие порождает целый ряд преимуществ, проявляющихся в задачах приближения аналитически заданных функций и аппроксимации неизвестных функций, заданных экспериментальными значениями.

Рассмотрим три простых численных примера. Допустим, имеется рациональная дробь вида

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_m \cdot x^m},$$

1) пусть при определенном значении x она равна 9,42/3 = 3,14. В этом примере на основе исходных данных в виде двух чисел (с тремя и одним значащими числами) мы получили значение с тремя значащими числами.

2) допустим, переменная x приобрела такое значение, что рациональная дробь стала равной 9,8956/3,15 = 3,1414(603174). В этом случае мы имеем результат, в котором число значащих разрядов бесконечно, однако шесть значащих цифр периодически повторяются.

3) наконец, пусть x такое, что рациональная дробь стала равной 9,8955/3,1499 = 3,141628039875547653819290113658. При этом в пределах 32-х разрядной сетки вычислительного устройства мы не наблюдаем периодичности результирующего значения.

Таким образом, мы обнаружили, что рациональная дробь является источником потенциально «бесконечного» количества информации, которое практически, конечно, ограничивается длиной разрядной сетки применяемого вычислительного устройства. Такая ситуация невозможна, если функция представляется полиномом.

Самым известным и практически единственным методом получения рационального приближения функции одной переменной является аппроксимация Паде [1]. Этот метод требует знания аналитического представления самой функции и всех её производных.

Пусть задан следующий ряд:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i, \tag{1}$$

представляющий функцию $f(x)$.

Аппроксимация Паде - это рациональная функция, представляющая собой отношение двух полиномов: L порядка n и M порядка m:

$$\varphi(x) = \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_m \cdot x^m} \tag{2}$$

Метод аппроксимации Паде основан на разложении функции $\varphi(x)$ в ряд Тейлора таким образом, чтобы оно совпадало с разложением $f(x)$ (1). Совпадение определяется равенством соответствующих коэффициентов разложений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_m \cdot x^m} + O(x^{n+m+1}) \tag{3}$$

Для составления уравнений для неизвестных коэффициентов a_i, b_i умножим обе части уравнения (3) на знаменатель дроби:

$$(b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_m \cdot x^m) \cdot (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n + O(x^{n+m+1}) \tag{4}$$

Очевидно, что поскольку порядок полинома правой части равен n, все коэффициенты левой части при x со степенями более n, а именно n+1, n+2, n+3, …, $n + m$ должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned} &b_m \cdot c_{n-m+1} + b_{m-1} \cdot c_{n-m+2} + \cdots + b_1 \cdot c_n + b_0 \cdot c_{n+1} = 0 \\ &b_m \cdot c_{n-m+2} + b_{m-1} \cdot c_{n-m+3} + \cdots + b_1 \cdot c_{n+1} + b_0 \cdot c_{n+2} = 0 \\ &\ldots \\ &b_m \cdot c_n + b_{m-1} \cdot c_{n+1} + \cdots + b_1 \cdot c_{n+m-1} + b_0 \cdot c_{n+m} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Для того, чтобы (5) можно представить в виде системы m линейных уравнений с m неизвестными коэффициентами знаменателя b_i (i = 1,2, …m) обычно принимают $b_0 = 1$. Решение новой системы относительно b_i, если оно существует, позволяет найти затем все коэффициенты числителя a_i (i = 0,1, 2, …n) сравнением коэффициентов в равенстве (4) для свободных членов и при всевозможных степенях x не более n, а именно x, x^2, x^3, …, x^n.

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + b_1 \cdot c_0 \\ a_2 &= c_2 + b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_0 \\ &\dots \\ a_n &= c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0 \end{aligned} \tag{6}$$

Третий численный пример, приведенный выше, подтверждает важнейшее свойство аппроксимации Паде - выражение (2) с известными коэффициентами a_i, b_i, обеспечивающими равенство (3), содержит полную информацию об аппроксимируемой функции $f(x)$, хотя формально полиномы числителя и знаменателя в (2) имеют конечный порядок.

Этим свойством объясняется высокое качество аппроксимаций целого ряда важных для практических применений функций, когда представление в виде рациональной дроби открывает возможности для решения задач синтеза и анализа систем автоматического управления, анализа устойчивости их звеньев и систем в целом, а также в других технических применениях.

Аппроксимация Паде имеет множество реализаций, если система (5) имеет решение, т.к. значение свободного члена b_0 было установлено произвольно, порядки полиномов числителя и знаменателя n и m также можно менять, получая аппроксимацию с наилучшим результатом.

В табл. 1 приведены девять вариантов аппроксимации функции $f(x) = e^x$ в зависимости от принятых порядков n и m [2].

Таблица 1

Варианты аппроксимаций Паде функции $f(x) = e^x$
в зависимости от порядков полиномов рациональной дроби

$n \setminus m$	0	1	2
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1+x}{1}$	$\frac{2+2x+x^2}{1}$
1	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{2+x}{2-x}$	$\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$
2	$\frac{2}{2+2x+x^2}$	$\frac{6+2x}{6-2x+x^2}$	$\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$

Можно попытаться найти аппроксимацию Паде для функции многих переменных $f(x_1, x_2, \dots x_n)$. Для этого в рамках идеи метода необходимо записать рациональную дробь в виде:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L(x_1, x_2, \dots x_n)}{M(x_1, x_2, \dots x_n)} =$$
$$= \frac{a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \dots + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \dots + a_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \dots + a_n \cdot x_1{}^n + \dots}{b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 \dots + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \dots + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \dots + b_m \cdot x_1{}^m + \dots}$$

и затем искать соответствие коэффициентов этой дроби с её разложением в ряд Тейлора по формуле для функции многих переменных [3].

В такой постановке, в отличие от равенства (4) с одноиндексными коэффициентами a_i, b_i, решение задачи определения аппроксимации Паде, которая характеризуется многоиндексными коэффициентами, требует формирования множества синхронно решаемых систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов с одной системой индексов. Очевидно, что отсутствие решения хотя бы одной системы линейных алгебраических уравнений из сформированного множества, исключает наличия полного решения задачи определения аппроксимации Паде в многомерном случае.

Аппроксимации экспериментальных данных основаны на методах максимального правдоподобия [3], минимизирующих разности экспериментальных данных со значениями искомой сглаживающей функции. Впервые этот метод практически применил К. Гаусс для функции одного переменного, который затем назвали методом наименьших квадратов [4].

В современной литературе редко приводятся сведения о применении метода наименьших квадратов для получения сглаживающей функции многих переменных, что связано с тем, что метод не дает рекомендаций по выбору класса или аналитического представления вида аппроксимируемой функции. В частности в работе [5] автор данной статьи смог предложить методику получения сглаживающей функции трех переменных в условиях, когда экспериментальные данные были получены виде поверхностей уровня для одного из параметров. Однако полное решение задачи потребовало применения сочетания метода наименьших квадратов на первом этапе аппроксимации с построением полинома Лагранжа на втором этапе аппроксимации для специально подобранного класса функций.

В общем случае экспериментальные данные не являются поверхностями уровня, поэтому от эксперимента к эксперименту мы можем получить произвольные экспериментальные значения (табл. 2).

Таблица 2

Многомерные экспериментальные данные

№ эксперимента j	x_1	x_2	…	x_{n-1}	$x_n = f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$	$T(j)$
1	x_{11}	x_{21}		$x_{n-1,1}$	f_1	
2	x_{12}	x_{22}		$x_{n-1,2}$	f_2	
3	x_{13}	x_{23}		$x_{n-1,3}$	f_3	
4	x_{14}	x_{24}		$x_{n-1,4}$	f_4	
5	x_{15}	x_{25}		$x_{n-1,5}$	f_5	
6	x_{16}	x_{26}		$x_{n-1,6}$	f_6	
7	x_{17}	x_{27}		$x_{n-1,7}$	f_7	
8	x_{18}	x_{28}		$x_{n-1,8}$	f_8	
9	x_{19}	x_{29}		$x_{n-1,9}$	f_9	
…	….	….	….	….	….	
N	x_{1N}	x_{2N}		$x_{n-1,N}$	f_N	

Для построения рациональной модели по имеющимся экспериментальным данным получим сначала универсальную математическую модель многомерного объекта, основанную на групповом преобразовании [6], в котором каждая переменная разложена на две линейные составляющие:

$$x_i = (k_1 \cdot x_i + b_1) + (-k_2 \cdot x_i - b_2)\,, \tag{7}$$

где $k_1 = \dfrac{b}{b-a}$, $b_1 = -\dfrac{a \cdot b}{b-a}$, $k_2 = \dfrac{a}{b-a}$, $b_2 = -\dfrac{a \cdot b}{b-a}$. $b = \max x_{ij}$ $a = \min x_{ij}$.

При этом все множество экспериментальных значений, приведенных в табл. 1 оказывается внутри ограниченного параллелепипеда с размерами по каждой стороне (b-a), и пространство объекта становится компактным. Параметры k_1, k_2, b_1, b_2 будем называть прямыми топологическими инвариантами. Наши дальнейшие преобразования при построении универсальной математической модели объекта (УММ) осуществляются с использованием нормы в виде мультипликативно-аддитивной нормы $T(j)$, значения которой вычисляются с использованием экспериментальных данных для каждого j-го измерения, т.е. в пространстве размерности n [7]:

$$T(j) = ((k_1 \cdot f(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})_j + b_1) + (-k_2 \cdot f(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})_j - b_2)) \cdot \\ \cdot [\prod_{i=1,n-1} ((k_1 \cdot x_{ij} + b_1) + (-k_2 \cdot x_{ij} - b_2))]. \qquad (8)$$

Все значения $T(j)$ являются константами и могут быть занесены в табл. 2. Норма позволяет аналитически выразить любую переменную исходного пространства через остальные переменные этого пространства и значения нормы $T(j)$. Значения $T(j)$ от эксперимента к эксперименту остаются практическими постоянными, поэтому $T(j)$ будем называть производным топологическим инвариантом.

Значения $f(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})_j$ в j - м узле рассчитываются по формуле, прямо вытекающей из формулы (8):

$$f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_{\mathrm{n-1}})_j = \left(\frac{T(j)}{\prod\limits_{i=1,n-1} ((k_1 \cdot x_{ij} + b_1) + (-k_2 \cdot x_{ij} - b_2))} + (b_2 - b_1) \right) \cdot \frac{1}{k_1 - k_2}. \qquad (9)$$

Для произвольных значений переменных $x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1}$ можно применить следующую формулу, представляющую собой симплекс, натянутый на точки, вычисляемые по формуле (9) [38]:

$$f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_{\mathrm{n-1}}) = \left(\frac{\sum\limits_{j=1,N} \frac{1/\delta(j)}{\Delta} T(j)}{\prod\limits_{i=1,n-1} ((k_1 \cdot x_i + b_1) + (-k_2 \cdot x_i - b_2))} + (b_2 - b_1) \right) \times \frac{1}{k_1 - k_2}, \qquad (10)$$

где

$$\delta(j) = \prod_{i=1,n-1} ((k_1 \cdot x_{ij} + b_1) + (-k_2 \cdot x_{ij} - b_2)) - \prod_{i=1,n-1} ((k_1 \cdot x_i + b_1) + (-k_2 \cdot x_i - b_2)\ ), \qquad (11)$$

$$\Delta = \sum_{j=1,N} 1/\delta(j)\,. \qquad (12)$$

Обозначим:

$$A(j) = \prod_{i=1,n-1} ((k_1 \cdot x_{ij} + b_1) + (-k_2 \cdot x_{ij} - b_2))$$

$$P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) = \prod_{i=1,n-1}((k_1 \cdot x_i + b_1) + (-k_2 \cdot x_i - b_2)) =$$

$$= \sum_{i,j,\ldots s=0,1} x_1^{\,i} \cdot x_2^{\,j} \cdot \ldots x_{n-1}^{\,s} \cdot (k_1 - k_2)^{(i+j+\ldots+s)} \cdot (b_2 - b_1)^{(n-1-i-j-\ldots-s)}, \qquad (13)$$

тогда формулу (10) можно переписать в виде:

$$f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) = \left(\frac{\displaystyle\sum_{j=1,N} \frac{\dfrac{1}{A(j) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})}}{\displaystyle\sum_{j=1,N} \dfrac{1}{A(j) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})}} \cdot T(j)}{P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})} + (b_2 - b_1) \right) \times \frac{1}{k_1 - k_2}. \qquad (14)$$

Если обозначить:

$$\sum_{j=1,N} \frac{1}{A(j) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1,N} \prod_{\substack{k=1,N \\ k \neq j}} (A(k) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}))}{\mathrm{T}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})},$$

где $\mathrm{T}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) = \prod_{\mathrm{j=1,N}} (\mathrm{A(j)} - \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}))$,

то формулу (13) можно переписать иначе, т.к. $P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})$ и $T(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})$ не зависят от j:

$$f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) = \left(\frac{T(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) \cdot \displaystyle\sum_{j=1,N} \frac{1}{A(j) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})} \cdot T(j)}{P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) \cdot \displaystyle\sum_{j=1,N} \prod_{\substack{k=1,N \\ k \neq j}} (A(k) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}))} + (b_2 - b_1) \right) \cdot \frac{1}{k_1 - k_2} =$$

$$= \frac{T(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) \cdot \displaystyle\sum_{j=1,N} \{T(j) \cdot \sum_{j=1,N} \prod_{\substack{k=1,N \\ k \neq j}} (A(k) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}))\} + (b_2 - b_1)}{(k_1 - k_2) \cdot P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) \cdot \displaystyle\sum_{j=1,N} \prod_{\substack{k=1,N \\ k \neq j}} (A(k) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})) \cdot T(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}})} =$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{j=1,N} \prod_{\substack{k=1,N \\ k \neq j}} A(k) \cdot [(k_1 \cdot f_k + b_1) + (-k_2 \cdot f_k - b_2)](A(k) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}))}{(k_1 - k_2) \cdot P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}) \cdot \displaystyle\sum_{j=1,N} \prod_{\substack{k=1,N \\ k \neq j}} (A(k) - P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_{\text{n-1}}))} +$$

$$
+\frac{(b_2-b_1)\cdot P(x_1,x_2,\dots x_{n-1})\cdot\sum\limits_{j=1,N}\prod\limits_{\substack{k=1,N\\k\neq j}}(A(k)-P(x_1,x_2,\dots x_{n-1}))}{(k_1-k_2)\cdot P(x_1,x_2,\dots x_{n-1})\cdot\sum\limits_{j=1,N}\prod\limits_{\substack{k=1,N\\k\neq j}}(A(k)-P(x_1,x_2,\dots x_{n-1}))}=\frac{L(x_1,x_2,\dots x_{n-1})}{M(x_1,x_2,\dots x_{n-1})}. \quad (15)
$$

Структура полинома $P(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})$, определенная формулой (13), определяет его порядок (n-1). Нули полинома $P(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})$ зависят только от значений прямых инвариантов и количества переменных (n-1).

Второй сомножитель полинома $M(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})$ имеет следующую структуру слагаемых:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1,N}\prod_{\substack{k=1,N\\k\neq j}}(A(k)-P(x_1,x_2,\dots x_{n-1}))=\\
&\quad = N\cdot(-1)^{N-1}x_1^{\ N-1}\cdot x_2^{\ N-1}\dots x_{n-1}^{\ N-1}\cdot(k_1-k_2)^{(n-1)\cdot(N-1)}+\dots+\prod_{j=1,N-1}[A(j)-(b_2-b_1)]
\end{aligned}. \quad (16)
$$

Порядок второго сомножителя как видно из формулы равен (n-1)* (N-1), поэтому порядок знаменателя $M(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})$ равен $(n\text{-}1)^2$* (N-1). Второй сомножитель имеет нули, зависящие от прямых и производных топологических инвариантов, а также экспериментальных данных табл. 2.

Порядок полинома числителя $L(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})$, как видно из формулы (15) с учетом формулы (16), также равен $(n\text{-}1)^2$*(N-1).

Анализ всех нулей полинома $M(x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1})$ может дать полную информацию о расположении областей устойчивости моделируемого рациональной дробью многомерного объекта с учетом точности получения экспериментальных данных и алгоритма поиска нулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимация Паде. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986.- 502 с.
2. *Громов Ю.Ю., Татаренко С.И.* Введение в методы численного анализа. Тамбов, ТГУ – 2001.- 155 с.
3. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1984.- 832 с.
4. *Бронштейн Д.А., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1980. – 976 с.
5. *Гусев А.Н.* Расчет выходных характеристик световодного жидкокристаллического индикатора // Электронная техника. Сер. 5. Радиодетали и радиокомпоненты, 1985, № 1, С. 43-47.
6. *Гусев А.Н.* Генерация и применение линейных пространств в информационной технологии обработки многомерной информации. // Сб. научн. трудов "Информационные технологии и семиотика". М.: ВНИИКИ, 1999, с. 112-122.

7. *Гусев А.Н.* Информационная технология сопровождения многомерных объектов: идентификация, прогнозирование, оптимизация, управление, обеспечение качества. М.: МГОУ, 2010, 361 с.

SYNTHESIS OF N-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL FOR EXPERIMENTAL DATA OBJECT AS A RATIONAL FRACTION

A. Gusev

Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. This article discusses options for approximation of functions of rational fractions. Here are shown the advantages and restrictions of approximation of Pade for approximation of analytically set differentiated functions. Transformation of universal topological model based on experimental data on the characteristics of a *n*-dimensional object received good approximation of rational fraction. The order of polynoms of numerator and denominator of rational fraction is defined. Structure of rational fraction object allows you to analyze sustainability, defining a zero denominator polynomial.
Keywords: Pade approximation, rational fraction, polynomial, multidimensional object, topological invariants, sustainability.

УДК 514.77 + 512.54 + 517.91

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.А. МАТВЕЕВ*, А.В. ПАНШИНА**

**Московский государственный областной университет,*
105005, Москва, ул. Радио, 10а

***Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5

Аннотация. Многообразиям аффинной связности и их обобщениям – многообразиям с траекториями сопоставляются широкие классы систем обыкновенных дифференциальных уравнений, свойства решений которых, в результате предлагаемой конструкции, получают точное дифференциально-геометрическое и алгебраическое описание. Выделяются случаи локально симметрических и плоских (абелевых) систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты используются для исследования Лагранжевых механических систем.
Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений, механические системы, аффинная связность, квазигруппа.