Работа выполнена в рамках проекта «Построение гомотопически устойчивого аналога симплициального объекта» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013гг.» Государственный контракт № П1226 от 07 июня 2010.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадеишвили, Т.В.* К теории гомологий расслоенных пространств / Т. В. Кадеишвили //Успехи математических наук. – 1980. – т. 35. Вып 3(213). – С. 183–188.
2. *Лапин, С.В*. Дифференциальные возмущения и D_∞-дифференциальные модули / С.В. Лапин // Математический сборник. – 2001. – т.192. №11. – С.55–76
3. *Смирнов, В.А.* A_∞-симплициальные объекты и A_∞-топологические группы / В. А. Смирнов // Математические заметки. – 1999. – т.66. Вып. 6. – С. 913–919.
4. *Gugenheim, V.K.A.M*. On a chain complex of a fibration / V.K.A.M. Gugenheim // Illinois J. Math. – 1972. – V.3. – P. 398-418.
5. *May, J. P*. Simplicial objects in algebraic topology / J.P. May – Van Nostred, Math.Studies,11 -1967 – 162 p.

ANALOG SIMPLICIAL FASES IN A_∞-CASE

M. Ladoshkin

Mordovian state pedagogical institute by M.E.Evsevev (Saransk)
430007, Respublika Mordovia, Saransk, st. Studencheskaya, 11a,

Abstract. In this paper, the problem of constructing an analog of Δ-sets in A ∞-case. Presented to design the higher faces, we prove their existence on the homology, but also addresses the effect of the differential on this site. In proving the theorems we use the technique of SDR-situations themselves prove constructive.
Keywords. Simplicial object, homotopy stable, SDR-situation, high fases.

УДК 519.632.4

О БЫСТРЫХ МЕТОДАХ ПРИ РЕШЕНИИ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ОКЕАНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В.Е. Волков, В.М. Простокишин, Д.Г.Орловский

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Рассмотрена аппроксимация трёхмерных уравнений несжимаемой жидкости, описывающих океанические течения. Аппроксимация на трёхмерную сетку в фиксированные моменты времени и в приближении «замороженных» коэффициентов обмена сводит описание течений к задаче Дирихле для разностного уравнения Лапласа в кубе. Предложен метод нахождения её решения на множестве узлов трёхмерной сетки в плоских сечениях куба с равномерной по пространству точностью. Показано, что требуемое для решения общее число арифметических действий по порядку величины совпадает с числом действий нахождения коэффициентов Фурье заданных граничных условий. Излагаются приближённые методы решения задачи Дирихле во всём кубе с оптимальным числом действий на узел сетки, приведены явные оценки получающейся при этом погрешности.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Дирихле, быстрый численный алгоритм, погрешность.

При описании стационарных океанических течений со слабо изменяющимися турбулентными коэффициентами обмена [9;10] с использованием метода «расщепления» [8] возникает необходимость неоднократного решения двумерных и трёхмерных задач Дирихле для уравнения Лапласа [1;2]. В этой связи актуальным является нахождение быстрых алгоритмов численного решения не одномерных уравнений Пуассона и Лапласа, чему и посвящена данная работа. В работе [5] приведены простые двухмерные и трёхмерные алгоритмы с оценкой числа действий в них. Эти методы проще, чем разработанные впервые алгоритмы такого типа в двумерном случае [11]. В [6] был построен более сложный алгоритм в двумерном случае с аналогичной характеристикой по числу действий. а также изложены приближённые В работе описаны методы решения задачи Дирихле в кубе асимптотически за одно или два сложения на узел и приведены явные оценки погрешности.

1. Разностное уравнение Лапласа в кубе.

Построение сетки. Рассмотрим прямоугольную трёхмерную область и, после перенормировки она переводится в единичный куб $R=\{(x_1,x_2,x_3):\ 0<x_i<1,\ i=1,2,3\}$. Обозначим его грани без границ через $\Gamma_j,\ j=1,...6$, причём при j=1,2,3 Γ_j лежит в плоскости $x_j=0$, а при j=4,5,6 Γ_j лежит в плоскости $x_{j-3}=1$. Введём кубическую равномерную сетку плоскостями $x_i=0,h,2h,...,\ i=1,2,3$, где шаг сетки задаётся $h=2^{-q}$, $q\in\mathbb{N}$. Обозначим множество внутренних узлов сетки через R^h и граничных узлов через $\Gamma_j^h,\ \Gamma^h=\Gamma_1^h\cup...\cup\Gamma_6^h$.

Постановка и представление разностной задачи Дирихле. Введём на сетке стандартный трёхмерный семиточечный разностный оператор Лапласа Δ_h и пусть φ_i^h - ограниченная по модулю единицей произвольная функия, заданная на Γ_j^h. Тогда на сетке R^h определена разностная задача Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta_h u^h=0,\ x_j^h\in R^h,\\ u^h=\varphi_j^h,\ x_j^h\in\Gamma_j^h,\ j=1,...,6,\end{cases}\qquad(1)$$

а также определена частичная краевая задача:

$$\begin{cases}\Delta_h u_3^h=0,\ x_3^h\in R^h,\\ u_3^h=\varphi_3^h,\ x_3^h\in\Gamma_3^h,\ u_3^h=0,\ \ \Gamma^h\setminus\Gamma_3^h,\end{cases}\qquad(2)$$

где $\varphi_3^h=\varphi_3^h(x_1,x_2)$.

Тогда для представления разностного решения для задачи (2) справедлива обобщающая формулы Вазова [3] на трёхмерный случай

Лемма 1. Решение u_3^h *задачи (2) представимо на* $R^h \cup \Gamma^h$ в виде:

$$\begin{aligned} &u_3^h(x_1,x_2,x_3)=\sum_{m=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{N-1} b_{mn}\omega_{mn}(x_3)\sin\left(\pi m x_1\right)\sin\left(\pi n x_2\right),\ N=1/h=2^q, \\ &b_{mn}=4h^2\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-1}\varphi_3^h(kh,lh)\sin(\pi mkh)\sin(\pi nlh) \\ &\omega_{mn}(x_3)=e^{-\beta_{mn}x_3}(1-e^{-2\beta_{mn}(1-x_3)})(1-e^{-2\beta_{mn}})^{-1}, \\ &\beta_{mn}=\frac{2}{h}arsh\sqrt{\sin^2\frac{\pi mh}{2}+\sin^2\frac{\pi nh}{2}},\quad \left(m+n\right)<\beta_{mn}<\pi\sqrt{m^2+n^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство леммы 1 приведено в [7].

2. Построение решений в трёхмерном кубе и на его сечениях

Обозначим через $L_j^h(a)$ множество узлов сетки R^h, лежащих в плоскости a, тогда $L_1^h(a),\ L_2^h(b)$ - вертикальные сечения, $L_3^h(c)$ - горизонтальное сечение.

Решение на вертикальном сечении. Применим формулу (3) для нахождения приближённого решения задачи с равномерной точность $0.25c_0h^p$ на вертикальном сечении $L_2^h(j_0h)$, для любого $j_0\in\{1,2,...,(N-1)\}$, где $c_0\in(0,1]$, p>0 - заданные константы.

Находим коэффициенты Фурье b_{mn} с помощью быстрого дискретного преобразования Фурье (БПДФ), при этом потребуется $O(N^2\ln N)$ арифметических действий [4;12]. Обозначим $n_0=\min\{(N-1),\left[\frac{2}{\pi}\ln\frac{8N^{p+2}}{c_0}\right]+1\}$, $N_k=\min\{(N-1),\left[\frac{2N}{\pi k}\ln\frac{8N^{p+2}}{c_0}\right]+1\}$,

где выражение в квадратных скобках – целая часть числа, положим

$$\omega_{mn}^*(kh)=\begin{cases}\omega_{mn}(kh),\ n_0\ge\max\{m,n\},\\ \exp\{-\beta_{mn}kh\},\ n_0<\max\{m,n\}\ \le N_k,\end{cases}$$

$$b_m^k=\begin{cases}\sum_{n=1}^{N_k}\omega_{mn}^*(kh)\sin(\pi n j_0 h),\ m\le N_k,\\ 0,\ N_k<m\le(N-1),\end{cases} \tag{4}$$

$$\mathrm{v}_3^h(ih,j_0,kh)=\sum_{m=1}^{N-1}b_m^k\sin(\pi mih), \tag{5}$$

где $i=1,...,(N-1),\ k=1,...,(N-1),\ j_0\in\{1,2,...,(N-1)\}$.

Значения $\mathrm{v}_3^h(ih,j_0,kh)$ в (5) при каждом i находятся одномерным БДПФ для всех значений k. Число арифметических действий в (5) и в (6) составляет $O(N^2\ln N)$. Для оценки отличия приближенного решения (5) от точного решения задачи на вертикальном сечении докажем следующую лемму.

Лемма 2. Справедливо неравенство:

$$\max_{1\le i\le N-1}\ \max_{1\le k\le N-1}\left|u_3^h(ih,j_0,kh)-\mathrm{v}_3^h(ih,j_0,kh)\right|\le 0.25C_0h^p. \tag{6}$$

Доказательство. Из Леммы 1 и выражений (4) и (5) следует:

$$\max_{1\le i\le N-1}\ \max_{1\le k\le N-1}\left|u_3^h(ih,j_0,kh)-\mathrm{v}_3^h(ih,j_0,kh)\right|\le$$
$$\le\max_{1\le i\le N-1}\ \max_{1\le k\le N-1}\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{m=1}^{N-1}\sum\limits_{n=1}^{N-1}b_{mn}\omega_{mn}(kh)\sin\left(\pi mih\right)\sin\left(\pi nj_0h\right)-\\ -\sum\limits_{m=1}^{N_k}\sum\limits_{n=1}^{N_k}b_{mn}\omega_{mn}(kh)\sin\left(\pi mih\right)\sin\left(\pi nj_0h\right)\end{array}\right|+ \qquad (7)$$
$$+\max_{1\le i\le N-1}\ \max_{1\le k\le N-1}\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{m=1}^{N_k}\sum\limits_{n=1}^{N_k}b_{mn}\omega_{mn}(kh)\sin\left(\pi mih\right)\sin\left(\pi nj_0h\right)-\\ -\sum\limits_{m=1}^{N_k}\sum\limits_{n=1}^{N_k}b_{mn}\omega^*_{mn}(kh)\sin\left(\pi mih\right)\sin\left(\pi nj_0h\right)\end{array}\right|\equiv A+B.$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (7). Используем неравенство $\sum_{j=1}^{N-1}\left|\sin(\pi kjh)\right|\le 2(\pi h)^{-1}$ [5] выражение для b_{mn} и $\left|\varphi_3^h\right|\le 1$. Тогда $\left|b_{mn}\right|\le 16/\pi^2$. С учетом выражений для $\omega_{mn}(x_3)$, β_{mn}, условия $\left(m+n\right)<\beta_{mn}$ из Леммы 1 и выражения для N_k имеем при *k=1,…,N-1* $\max\{m,n\}>N_k$ и получаем оценку:

$$0<\omega_{mn}(kh)<\exp(-\beta_{mn}kh)<\exp(-\max\{m,n\}kh)\le(C_0/8)h^{p+2}.$$

Тогда

$$A=\max_{1\le i\le N-1}\max_{1\le k\le N-1}\left|\sum_{\substack{m,n:\\ N_k<\max\{m,n\}\le N-1}}b_{mn}\omega_{mn}(kh)\sin(\pi mih)\sin(\pi nj_0h)\right|\le$$
$$\le\frac{16}{\pi^2}\frac{C_0}{8}h^{p+2}\max_{1\le i\le N-1}\sum_{m=1}^{N-1}\left|\sin(\pi mih)\right|\sum_{n=1}^{N-1}\left|\sin(\pi nj_0h)\right|\le\frac{8C_0}{\pi^4}h^p<0.125C_0h^p.$$

Аналогично, показывается, что и второе слагаемое в правой части (7) не превосходит значения $0.125C_0h^p$. Лемма 2 доказана.

Решение на горизонтальном сечении. Рассмотрим произвольное горизонтальное сечение $L_3^h(k_0h)$, $k_0\in\{1,2,...,(N-1)\}$. Решение задачи (2) на этом сечении можно найти непосредственно по формулам (3) при $x_3=k_0h$ с помощью алгоритма БДПФ за $O(N^2\ln N)$ арифметических операций равномерно по k_0. При этом мы предполагаем, что все используемые значения тригонометрических функций и экспонент в общем числе $O(N^2)$ вычислены заранее.

Построение решения задачи в кубе. Решение общей задачи (1) в силу её линейности представимо в виде суммы решений шести частичных задач вида (2). При этом любое сечение $L_j^h(a)$ в R^h является вертикальным в четырёх и горизонтальным в двух частичных задачах. Поэтому решение исходной задачи (1) находится на любом сечении $L_j^h(a)$ с равномерной точностью C_0h^p, для её решения требуется $O(N^2\ln N)$ арифметических действий.

4. Алгоритмы приближенного решения разностной задачи асимптотически за два и одно действие на узел

Обозначим через $\Gamma_0^h(\rho)$ сеточный пограничный слой − множество узлов сетки R^h, удалённых от Γ^h на расстояние, не превышающее ρ.

Решение *асимптотически за два сложение на узел сетки***.**

Выберем $C_0 \in (0;1],\ p \in (0;3)$. Положим $\rho = A + H\{(0.5 - A)/H\}$, $A = h[1 + h^{\mu-1}C_0^{-1/5}]$, $\mu = (3-p)/8$, $\lambda = (5+p)/8$, $H = h[h^{\lambda-1}/10]$, где $[d]$ и $\{d\}$ –целая и дробная части d, соответственно. Положим, что h мало, т.е. $\rho < 1/2$, $H \ge h$ и зададим опорное множество горизонтальных сечений $\tilde{\mathrm{L}}^H = \{L_3^h(\rho + rH)\}_{r=0}^{s_h}, s_h = \ = (1-2p)H^{-1} = 2z,\ z \in \mathbb{N}$.

Воспользуемся описанным выше методом и учтём то, что сеточный пограничный слой $\Gamma_0^h(\rho)$ образуется объединением $6\rho/h$ плоских сечений сетки R^h. Тогда на $\Gamma_0^h(\rho) \cup \tilde{\mathrm{L}}^H$ приближённое решение v^h задачи (1) с равномерной точностью $C_0 h^p$ получается с помощью $M_1 = 9(\rho/h + s_h - 1)O(N^2 \ln N) = O(N^{(21+p)/8} \ln N)$ арифметических операций. При этом в узлах на пересечении нескольких указанных сечений в качестве v^h принимается среднее арифметическое значение имеющихся приближённых значений. Далее применяется параболическая интерполяция функции v^h по x_3 с опорного множества горизонтальных сечений $\tilde{\mathrm{L}}^H$ в точки множества $\mathrm{R}_0^h = \mathrm{R}^h \backslash [\Gamma_0^h(\rho) \cup \tilde{\mathrm{L}}^H]$. Интерполяция производится в промежутках, образуемых тремя соседними сечениями из $\tilde{\mathrm{L}}^H$, в узлах, лежащих на среднем сечении, находятся первые разности по x_3 в обе стороны с шагом *h*, и вторая разность с шагом *h*. При вычислении этих разностей выполняется $M_2 = O(N^2/H) = O(N^{(21+p)/8})$ арифметических операций. Так как вторая разность с шагом *h* для параболы постоянна, в текущей точке находится первая разность сложением предыдущей первой разности со второй разностью. В свою очередь, v^h в следующем узле сетки получается сложением значения v^h и первой разности в предыдущем узле, в результате на каждый узел, в который производится интерполяция, требуется два сложения. Справедлива

Теорема. Для приближенного решения v^h *справедлива следующая оценка невязки:*

$$\delta^h = \max_{(x_1,x_2,x_3)\in R^h} \left|\mathrm{v}^h - u^h\right| \le 2C_0 h^p,\ \ C_0 \in (0;1],\ p \in (0;3),$$

где u^h *решение задачи (1), причём в пересчёте на один узел сетки* R^h *выполняется* $M = 2 + \varepsilon_h$ *арифметических операций, здесь*

$$\varepsilon_h \le (M_1 + M_2)(N-1)^{-3} = O(N^{(p-3)/8} \ln N) = o(1).$$

Доказательство теоремы приведено в [7].

Решение *асимптотически за одно сложение на узел сетки***.**

Выберем $C_0 \in (0;1],\ p \in (0;2)$, положим $\rho = A + H\{(0.5 - A)H^{-1}\}$, $A = h[1 + h^{\mu-1}C_0^{-1/4}]$, $\lambda = (4+p)/6$, $\mu = (2-p)/6$, $H = h[h^{\lambda-1}/10]$. Аналогично предыдущему пункту находим на $\Gamma_0^h(\rho) \cup \tilde{\mathrm{L}}^H$ приближённое решение с равномерной точностью $C_0 h^p$. Затем решение v^h интерполируем линейно по x_3 между соседними горизонтальными сечениями, принадлежащими $\tilde{\mathrm{L}}^H$ в точки множества $\mathrm{R}_0^h = \mathrm{R}^h \backslash [\Gamma_0^h(\rho) \cup \tilde{\mathrm{L}}^H]$ путем прибавления на каждом шаге h постоянной первой разности. Приближённое решение v^h удовлетворяет неравенству вида $\delta^h = \max\limits_{(x_1, x_2, x_3) \in R^h} \left| \mathrm{v}^h - u^h \right| \le 2C_0 h^p$, где u^h − решение задачи (1).

При этом в пересчёте на один узел сетки R^h требуется выполнить $(1 + \varepsilon_h)$ арифметических операций, где $\varepsilon_h = O(N^{(p-2)/6} \ln N) = o(1)$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Batchelor G.K.* An introduction to Fluid Dynamics / Cambridge Univ. Press. 2000. 635 p.
2. *Chorin A.J.* Vorticity and Turbulence / Springer. 1994. 174 p.
3. *Wasow W.* On the truncation error in the solution of Laplace's equation by finite differences // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1952. V.48. P. 345-348.
4. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы / Бином. Лаборатория знаний. 2011. 636 с.
5. *Бахвалов Н.С., Орехов М.Ю.* О быстрых способах решения уравнения Пуассона // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. №6. С. 1386-1392.
6. *Волков Е.А.* Асимптотически быстрый приближённый метод нахождения на сеточных отрезках решения разностного уравнения Лапласа // Тр. МИАН СССР. 1986. Т.173. С. 69-89.
7. *Волков В.Е.* Асимптотически быстрые приближённые методы решения разностного уравнения Лапласа в кубе // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. С. 90-97.
8. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики /М.: Наука. 1989. 456 с.
9. *Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океанская турбулентность / Л.: Гидрометеоиздат. 1981. 320 с.
10. *Озмидов Р.В.* Диффузия примесей в океане / Л.: Гидрометеоиздат. 1986. 278 с.
11. *Романова С.Е.* Приближённые методы решения разностного уравнения Лапласа асимптотически за одно и два сложения на точку // Докл. АН СССР. 1983. Т.273. №1. С. 49-54.
12. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений / М.: Мир. 1983. 590 с.

ABOUT FAST APROXIMATE METHODS OF SOLVING PROBLEMS OF OCEAN FLOWS HYDRODYNAMICS

V. Volkov, V. Prostokishin, D.Orlovskiy

National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. Three dimension equation of liquid in ocean flows is described. Approximation on three dimension numerical grid with "frozen" turbulent exchange coefficients gets to Dirichlet's problem for Laplace's differential equation in a cube, and this problem is investigated. A method of solving it with prescribed uniform accuracy on a set off grid nodes in plane section of the cube is proposed. Asymptotically fast approximate methods for solving Dirichlet's problem in the entire grid cube which use one or two additions per node are described, and explicit error estimate are given.

Key words: Laplace's equation, Dirichlet's problem, fast approximate algorithm, numerical error.