

$$D_{z_1}^{(n)} D_{z_2}^{(m)} [\tilde{F}_2(z_1, z_2)] = \frac{n!m!}{(2\pi i)^2} \int_0^{\tau_1} d\tau \int_{\tau^2}^{\tau^{m\delta_2}} \frac{\tau^{m\delta_2} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)^{n+1} (\zeta_2 - u_2)^{m+1}} + \\ + \frac{n!m!}{(2\pi i)^2} \int_{\tau_1}^1 d\tau \int_{\tau^2}^{\tau^{m\delta_2}} \frac{\tau^{m\delta_2} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)^{n+1} (\zeta_2 - u_2)^{m+1}}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелаев, А.В. Обобщение интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом [Текст] // Вестник МГОУ. – Серия «физика-математика». – М.: изд. МГОУ. – 2010, №1. – С. 3-16.

INVESTIGATION IN THE GENERALIZED ANALITICAL PROPERTIES OF GENERALIZATION OF THE CAUCHY'S INTEGRAL TYPE ASSOCIATED WITH BICIRCLE

A. Nelayev

Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The author continues his investigation of generalized analytical properties of generalization of the Cauchy's integral type associated with bicircle.

Keywords: Cauchy's integral, bicircle.

УДК 512.662.1

АНАЛОГ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ ГРАНЕЙ В A_∞ -СЛУЧАЕ

М.В. Ладоскин

Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева (Саранск)
430007, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Студенческая 11 а

Аннотация. В предлагаемой работе рассматривается вопрос построения аналога Δ -множества в A_∞ -случае. Предъявляется конструкция высших граней, доказывается теорема об их существовании на гомологиях, а также рассматривается вопрос о действии дифференциала на таком объекте. При доказательстве теорем используется техника SDR-ситуаций, сами доказательства конструктивны.

Ключевые слова. Симплициальный объект, гомотопическая устойчивость, SDR-ситуация, высшие грани.

В последнее время в алгебраической топологии актуальным является процесс создания аналогов алгебраических структур, которые были бы устойчивы при переходе к гомотопическому случаю. Первые работы в этом направлении относятся к 70-м годам прошлого века (Дж. Мэй, Т. Кадеишвили, В. Смирнов) и касались построения аналога

градуированных и дифференциальных алгебр. [1] Позднее велись работы по созданию подобного рода аналогов для алгебр Ли, дифференциальных модулей, коммутативных алгебр и других. [2]

Результаты, представленные в данной работе, являются продолжением работ, начатых в [3]. Подход, предлагаемый автором, является более алгебраическим, и позволяет построить аналог всей структуры Δ -множества, а не только его предсимплициальной части. Основными результатами является сама конструкция аналога Δ -множества, а также утверждения о его существовании и правиле вычисления дифференциалов от высшей грани. Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, то есть над $\mathbf{Z}_2$. Подобный прием является часто используемым в алгебраической топологии, так как позволяет избежать постоянной записи знаков, а также проверки их совпадения. Однако большинство утверждений, верных для случая поля характеристики 2 остаются верными и для произвольного случая.

Изложим основные определения, необходимые для дальнейшего изложения положений работы. Начнем с определения симплициального множества [4].

Определение 1. Симплициальное множество K – упорядоченный набор множеств, индексированный неотрицательными целыми числами, рассматриваемый вместе с отображениями $d_i: K_q \rightarrow K_{q-1}$ и $s_i: K_q \rightarrow K_{q+1}$, $0 < i \leq q$ которые удовлетворяют следующим условиям:

- (i) $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ если $i < j$,
- (ii) $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ если $i < j$,
- (iii) $d_i s_j = s_{j-1} d_i$, если $i < j$,
- $d_j s_j = id = d_{j+1} s_j$,
- $d_i s_j = s_j d_{i-1}$, если $i > j+1$.

(1)

Элементы K_q будем называть q -симплексом или симплексом размерности q . Отображения d_i и s_j называют соответственно операторами граней и вырождений.

Пример 1. Пусть $\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n), 0 \leq t_i < 1, \sum t_i = 1\} \in R^{n+1}$. Если X - топологическое пространство, то сингулярный n -мерный симплекс f – это непрерывная функция $f: \Delta_n \rightarrow X$. Градуированное множество $S(X)$, где $S_n(X)$ – множество сингулярных n -мерных симплексов X , называется тотальным сингулярным комплексом X . $S(X)$ становится симплициальным множеством, если мы определяем операторы граней и вырождений следующим образом:

$$(d_i f)(t_0, \dots, t_{n-1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}),$$

и

$$(s_i f)(t_0, \dots, t_{n+1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i \cdot t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{n+1}).$$

Если в формуле (1) ограничиться только рассмотрением соотношений (i), то получим определение Δ -множества. Напомним его, следуя работе [4].

Определение 2. Δ -множеством называется набор градуированных модулей $\{X_i\}$, индексированное неотрицательными индексами, рассматриваемое вместе с набором отображений $\partial_q : X_i \rightarrow X_{i-1}$ $0 \leq q \leq i$ которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i, \text{ если } i < j \quad (2)$$

Отображения ∂_i называются гранями. Определение Δ -множества отличается от определения симплициального множества отсутствием вырождений и, соответственно, связей между гранями и вырождениями.

Теперь все готово для формирования изложено построение аналога симплициальных граней в гомотопически устойчивом случае.

Прежде чем сформулировать определение аналога Δ -множества, дадим несколько вспомогательных определений. Для этого рассмотрим сначала упорядоченный набор натуральных чисел $i_1, \dots, i_k$, в котором каждый индекс также принадлежит множеству натуральных чисел.

Определение 3. Будем обозначать $t(i_j)$ для числа i_j , входящего в $i_1, \dots, i_k$, если $i_{r_1} < i_j, \dots, i_{r_t} < i_j$ и $r_1 > j, \dots, r_t > j$. Другими словами, t – количество чисел $i_{r_1} < i_j$ стоящих правее i_j .

Определение 4. Будем обозначать $\tilde{i}_j$ для числа i_j , входящего в $i_1, \dots, i_k$, если $\tilde{i}_j = i_j - t$, где t вычисляется согласно определению 3.

Пример 2. $\tilde{3} = 3 - 2 = 1$, для $(3, 2, 1, 4, 5)$

Рассмотрим цепной комплекс X , то есть модуль $X = \bigoplus C_i$, где каждый C_i – модуль, снабженный последовательностью отображений $d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$, называемых дифференциалами, удовлетворяющих условию:

$$d_i(d_{i+1}) = 0. \quad (3)$$

Определим на этом комплексе структуру Δ_∞ -множества.

Определение 5. Δ_∞ -множеством будем называть цепной комплекс X с дифференциалом d , снабженный набором отображений

$$\partial_{i_1, i_2, \dots, i_n} : X_m \rightarrow X_{m-1},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$d\partial_i = \partial_i d, \quad (4)$$

$$\sum \partial_{\tilde{\sigma}(i_1), \tilde{\sigma}(i_2), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)} = 0, \quad (5)$$

где σ - подстановка из симметрической группы S_k , а суммирование идет по всем подстановкам, действующим на данный набор $i_1, \dots, i_k$.

Отображения $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ будем называть высшими гранями.

Следует отметить, что соотношения (4) означают, что грани являются отображениями дифференциальных модулей, соотношения (5) соответствуют обычным симплициальным соотношениям для граней в случае симплициального модуля. Как и симплициальные соотношения, соотношения (5) позволяют записать любую грань в виде упорядоченной грани, то есть в виде $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_n}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Заметим, что если грань $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ – упорядоченная, то $\tilde{i}_j > 0$.

Сформулируем теорему о существовании Δ_∞ -множеств.

Теорема 1. Рассмотрим цепной комплекс C с дифференциалом d . Пусть на данном цепном комплексе задана структура Δ -множества, согласованная с дифференциалом d таким образом, что каждая грань является цепным отображением, то есть $d\partial_i = \partial_i d$. Тогда на гомологиях данного цепного комплекса $H(C)$ существует структура Δ_∞ -множества.

Доказательство. Доказательство теоремы будем проводить конструктивно, то есть предъявим алгоритм получения высших граней на гомологиях цепного комплекса и покажем, что полученные грани определяют на $H(C)$ структуру Δ_∞ -модуля.

Рассмотрим стандартную SDR-ситуацию цепных комплексов C и $H(C)$, то есть система отображений $\{\eta: C \rightarrow H(C): \xi, h\}$, если для отображений

$$h: C \rightarrow C, \eta: C \rightarrow H(C), \xi: H(C) \rightarrow C \quad (6)$$

выполняются следующие условия:

$$dh + hd = \xi\eta + id; h\xi = 0; \eta h = 0; hh = 0; \eta\xi = id. \quad (7)$$

Отображение $h: C \rightarrow C$ – гомотопия между отображением $\xi\eta$ и тождественным отображением. Отображение $\eta: C \rightarrow H(C)$ – выбор класса гомологий по представителю, отображение $\xi: H(C) \rightarrow C$ – выбор представителя в классе. Однозначность отображения ξ может быть достигнута путем фиксации разложения C в прямую сумму $C \oplus H(C)$. Поскольку все происходит над полями, то такое разложение всегда существует, и однозначно определяет отображение ξ . Заметим, что отображения η и ξ являются цепными, то есть перестановочны с дифференциалом в соответствующих комплексах.[5]

Теперь рассмотрим получение высшей грани на гомологиях. Для произвольной высшей грани $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ составим упорядоченную последовательность $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_k}$. К каждой паре граней $\partial_i, \partial_{i+1}$, из данной последовательности применим симплициальные соотношения. Если возможно, то к полученным последовательностям тоже. Получим для

каждой исходной последовательности $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_k}$ набор последовательностей $\{\partial_{t_1}, \partial_{t_2}, \dots, \partial_{t_k}\}$.

Определим высшую грань $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ по следующим формулам:

$$\partial_{t_1} = \eta \partial_{t_1} \xi, \quad (8)$$

$$\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \sum \eta (\partial_{i_1} h \partial_{i_2} h \dots h \partial_{i_k}) \xi. \quad (9)$$

Суммирование в формуле (9) будет идти по всем возможным последовательностям $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_k}$, полученным в результате процедуры, описанной выше.

Покажем, что определенные приведенным способом грани образуют Δ_∞ -модуль. Для этого сначала покажем, что высшие грани удовлетворяют условиям (4) и (5). Условие (4) выполняется в силу того, что все отображения $\eta, \partial_{t_1}, \xi$ являются цепными, то есть перестановочны с дифференциалом. Рассмотрим условие (5). Заметим, что число $\tilde{i}_j$ из определения 4 будет совпадать с числом упорядоченных инверсий, то есть инверсий, которые переводят последовательность индексов в упорядоченную. Применение каждого симплициального соотношения к паре индексов приводит к уменьшению номера переходящего влево элемента на 1. Таким образом, если мы возьмем некоторую упорядоченную последовательность натуральных индексов и будем попарно применять к каждой возможной паре последовательно симплициальные соотношения, то число, на которое уменьшается номер грани в результате последовательного действия нескольких симплициальных соотношений, есть в точности число упорядоченных инверсий, или число t из определения 3. Таким образом, мы показали, что любая грань, эквивалентная упорядоченной по формуле (6), может быть получена в результате одной из перестановок из симметрической группы S_k с учетом симплициальных соотношений. Верно и обратное, то есть все перебор всех перестановок из группы S_k даст все возможные равные грани. Таким образом, любая равная некоторой упорядоченной грани вида $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ высшая грань будет иметь вид $\partial_{\tilde{\sigma}(i_1), \tilde{\sigma}(i_2), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)}$, где $\tilde{\sigma}$ - подстановка из симметрической группы S_k , что и требовалось показать.

Но тогда для двух равных граней $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n}$ и $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}-1, i_k, \dots, i_n}$ набор последовательностей $\{\partial_{t_1}, \partial_{t_2}, \dots, \partial_{t_k}\}$, используемых для их построения, окажется одним и тем же. Это следует из того, что последовательность

$$\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_k}, \partial_{i_{k+1}}, \dots, \partial_{i_n}$$

входит в набор последовательностей для последовательности

$$\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_{k+1}-1}, \partial_{i_k}, \dots, \partial_{i_n}$$

полученных в результате применения последовательности симплициальных соотношений. Таким образом, мы показали, что высшие грани $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n}$ и $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}-1, i_k, \dots, i_n}$ будут состоять из одних и тех же составных слагаемых вида $\eta(\partial_{i_1} h \partial_{i_2} h \dots h \partial_{i_k}) \xi$, то есть на гомологиях рассматриваемого цепного комплекса существует структура Δ_∞ -модуля. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим пример, который проиллюстрирует идею доказательства теоремы о свойствах построенных высших граней, а именно, о действии на них дифференциала.

Пример 3. Рассмотрим построение высшей грани $\partial_{2,4,5}$. Применим к каждой паре последовательности $\partial_2 \partial_4 \partial_5$ симплициальные соотношения. Получим набор последовательностей $\partial_2 \partial_4 \partial_5$, $\partial_2 \partial_4 \partial_4$, $\partial_3 \partial_2 \partial_5$, $\partial_3 \partial_4 \partial_2$, $\partial_3 \partial_2 \partial_4$, $\partial_3 \partial_3 \partial_2$. Используя формулу (9), получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \partial_{2,4,5} = & \eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_2 h \partial_4 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_4 \xi + \\ & + \eta \partial_3 h \partial_2 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_4 h \partial_2 \xi + \eta \partial_3 h \partial_3 h \partial_2 \xi \end{aligned}$$

Теперь покажем, как на определенных нами высших гранях действует дифференциал. Данные действие рассмотрим на примере. Для этого проведем вычисления для высшей грани $\partial_{2,4,5}$, которые послужат иллюстрацией для общих рассуждений.

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & d(\eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_2 h \partial_4 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_4 \xi + \\ & + \eta \partial_3 h \partial_2 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_4 h \partial_2 \xi + \eta \partial_3 h \partial_3 h \partial_2 \xi) \end{aligned}$$

На каждом из слагаемых дифференциал действует по правилу Лейбница, то есть, например,

$$d(\eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi) = d\eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi d.$$

Учитывая, что отображения η, ∂_i, ξ – цепные, то мы можем переставить их с дифференциалом. Поэтому получаем:

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \eta \partial_2 d h \partial_4 h \partial_5 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h d \partial_5 \xi + \eta \partial_3 d h \partial_2 h \partial_4 \xi + \eta \partial_3 h \partial_2 h d \partial_4 \xi + \\ & + \eta \partial_2 d h \partial_4 h \partial_4 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h d \partial_4 \xi + \eta \partial_3 d h \partial_2 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_2 h d \partial_5 \xi + \\ & + \eta \partial_3 d h \partial_4 h \partial_2 \xi + \eta \partial_3 h \partial_4 h d \partial_2 \xi + \eta \partial_3 d h \partial_3 h \partial_2 \xi + \eta \partial_3 h \partial_3 h d \partial_2 \xi \end{aligned}$$

Для каждой нечетного по счету слагаемого применим условие (7) из определения SDR-ситуации, записанное в виде:

$$dh = hd + \xi \eta + id.$$

Получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \eta\partial_2 h\partial_4 dh\partial_5 \xi + \eta\partial_2 \xi\eta\partial_4 h\partial_5 \xi + \eta\partial_2 \partial_4 h\partial_5 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 h\partial_5 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 dh\partial_4 \xi + \eta\partial_3 \xi\eta\partial_2 h\partial_4 \xi + \eta\partial_3 \partial_2 h\partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 h\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_2 h\partial_4 dh\partial_4 \xi + \eta\partial_2 \xi\eta\partial_4 h\partial_4 \xi + \eta\partial_2 \partial_4 h\partial_4 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 h\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 dh\partial_5 \xi + \eta\partial_3 \xi\eta h\partial_2 h\partial_5 \xi + \eta\partial_3 \partial_2 h\partial_5 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 h\partial_5 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_4 dh\partial_2 \xi + \eta\partial_3 \xi\eta\partial_4 h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 \partial_4 h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_4 h\partial_2 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_3 dh\partial_2 \xi + \eta\partial_3 \xi\eta\partial_3 h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 \partial_3 h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_3 h\partial_2 \xi \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые вида $\eta\partial_2 \partial_4 h\partial_5 \xi$, содержащие одинаковые грани после гомотопии. Кроме того, сгруппируем слагаемые вида $\eta\partial_2 \xi\eta\partial_4 h\partial_5 \xi$, содержащие одинаковые первые три элемента. Таким образом, получаем для дифференциала от рассматриваемой грани выражение:

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \eta\partial_2 h\partial_4 (dh + hd)\partial_5 \xi + \eta\partial_2 \xi(\eta\partial_4 h\partial_5 \xi + \eta\partial_4 h\partial_4 \xi) + \\ & + \eta(\partial_2 \partial_4 + \partial_3 \partial_2)h\partial_5 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 (dh + hd)\partial_5 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 (dh + hd)\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_3 \xi(\eta\partial_2 h\partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 \xi) + \eta(\partial_3 \partial_2 + \partial_2 \partial_4)h\partial_4 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 dh\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 (dh + hd)\partial_5 \xi + \eta\partial_3 \xi(\eta h\partial_2 h\partial_5 \xi + \eta\partial_4 h\partial_2 \xi) + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_4 (dh + hd)\partial_2 \xi + \eta(\partial_3 \partial_4 + \partial_3 \partial_3)h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_3 (dh + hd)\partial_2 \xi \end{aligned}$$

Учитывая определения высших граней, а также симплициальные соотношения, получим выражение:

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \partial_2 \partial_{4,5} + \partial_3 \partial_{2,5} + \partial_3 \partial_{2,4} + \\ & + \eta\partial_2 h\partial_4 (dh + hd)\partial_5 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 (dh + hd)\partial_5 \xi \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 (dh + hd)\partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 (dh + hd)\partial_5 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_4 (dh + hd)\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_3 (dh + hd)\partial_2 \xi \end{aligned}$$

В последней записи ∂_2 – грань в гомологиях, полученная по вышеприведенному алгоритму. К каждому слагаемому в скобках применим формулу (7), получим

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \partial_2 \partial_{4,5} + \partial_3 \partial_{2,5} + \partial_3 \partial_{2,4} + \eta\partial_2 h\partial_4 \partial_5 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 \xi\eta\partial_3 \xi \\ & + \eta\partial_2 h\partial_4 \partial_4 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 \xi\eta\partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 \partial_5 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 \xi\eta\partial_5 \xi + \eta\partial_3 h\partial_4 \partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_4 \xi\eta\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 \partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 \xi\eta\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_3 \partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_3 \xi\eta\partial_2 \xi \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, содержащие лишь одну гомотопию, и используя определение граней в гомологиях, получим:

$$d(\partial_{2,4,5}) = \partial_2\partial_{4,5} + \partial_3\partial_{2,5} + \partial_3\partial_{2,4} + \eta\partial_2h(\partial_4\partial_5 + \partial_4\partial_4)\xi + \\ + \eta\partial_3h(\partial_2\partial_5 + \partial_4\partial_2)\xi + \eta\partial_3h(\partial_3\partial_2 + \partial_2\partial_4)\xi + (\eta\partial_2h\partial_4\xi + \eta\partial_3h\partial_2\xi)\eta\partial_4\xi + \\ + (\eta\partial_3h\partial_2\xi + \eta\partial_2h\partial_4\xi)\eta\partial_5\xi + (\eta\partial_3h\partial_3\xi + \eta\partial_3h\partial_4\xi)\eta\partial_2\xi.$$

Используя симплициальные соотношения, будем иметь:

$$d(\partial_{2,4,5}) = \partial_2\partial_{4,5} + \partial_3\partial_{2,5} + \partial_3\partial_{2,4} + \partial_{2,4}\partial_5 + \partial_{2,4}\partial_4 + \partial_{3,4}\partial_2$$

Проводя аналогичные рассуждения для произвольной грани, получим доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Дифференциал от упорядоченной грани $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, равен нулю при $k=1$, а при $k>1$ определяется формулой

$$d(\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} \partial_{\overline{\sigma(i_1)}, \dots, \overline{\sigma(i_r)}} \partial_{\overline{\sigma(i_{r+1}), \dots, \sigma(i_k)}} \quad (10)$$

Суммирование в формуле (10) идет в первом случае по всем возможным перестановкам из симметрической группы S_k , а во втором - по множеству I_σ всех разбиений набора $(\overline{\sigma(i_1)}, \dots, \overline{\sigma(i_r)})$ на два строго упорядоченных блока $(\overline{\sigma(i_1)}, \dots, \overline{\sigma(i_k)})$ и $(\overline{\sigma(i_{k+1})}, \dots, \overline{\sigma(i_r)})$, то есть блоки, в которых выполняется условие $\overline{\sigma(i_1)} < \overline{\sigma(i_2)} < \dots < \overline{\sigma(i_k)}$ и $\overline{\sigma(i_{k+1})} < \overline{\sigma(i_{k+2})} < \dots < \overline{\sigma(i_r)}$. В данном определении символ $\overline{\sigma(i_k)}$ рассматривается в смысле определения 4.

Замечание. Множество I_σ может быть и пустым для некоторой подстановки σ . Например, для подстановки $\sigma = (2\ 3\ 5\ 4\ 1)$ множество I_σ пусто.

Приведем пример вычисления дифференциала на грани с помощью формулы (10).

$$d(\partial_{1,2,5}) = \partial_1\partial_{3,5} + \partial_{1,3}\partial_5 + \partial_{1,4}\partial_3 + \partial_{2,4}\partial_1 + \partial_2\partial_{1,5} + \partial_3\partial_{1,3}$$

Поясним полученное выражение. Применяя к тройке (1,3,5) все подстановки из S_3 , получим (1,3,5), (1,5,3), (3,5,1), (3,1,5), (5,3,1), (5,1,3). Если на каждый элемент в каждой из полученных подстановок подействовать согласно определению 4, то получим следующие наборы (1,3,5), (1,4,3), (2,4,1), (2,1,5), (3,2,1), (3,1,3). Разбивая каждую из полученных затем троек на два упорядоченных блока, получим следующие разбиения:

- ((1), (3,5)), ((1,3), (5)) – соответствующие тройке (1,3,5);
- ((1,4), (3)) – соответствующие тройке (1,4,3);
- ((2,4), (1)) – соответствующее тройке (2,4,1);
- ((2), (1,5)) – соответствующее тройке (2,1,5);
- ((3), (1,3)) – соответствующее тройке (3,1,3).

Заметим, что тройке (3,2,1) не будет соответствовать ни одного упорядоченного разбиения.

В результате наших исследований построен A_∞ -аналог граней для симплициального случая, а также описан пример существования данной конструкции на гомологиях цепного комплекса. Автор благодарит Лапина С.В. за обсуждение и замечания в ходе подготовки работы. Полученные результаты могут быть использованы для построения общей структуры гомотопически устойчивого аналога симплициального объекта, что является целью дальнейших исследований.

Работа выполнена в рамках проекта «Построение гомотопически устойчивого аналога симплицеального объекта» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013гг.» Государственный контракт № П1226 от 07 июня 2010.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадеишвили, Т.В. К теории гомологий расслоенных пространств / Т. В. Кадеишвили // Успехи математических наук. – 1980. – т. 35. Вып 3(213). – С. 183–188.
2. Лапин, С.В. Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули / С.В. Лапин // Математический сборник. – 2001. – т.192. №11. – С.55–76
3. Смирнов, В.А. A_∞ -симплицеальные объекты и A_∞ -топологические группы / В. А. Смирнов // Математические заметки. – 1999. – т.66. Вып. 6. – С. 913–919.
4. *Gugenheim, V.K.A.M.* On a chain complex of a fibration / V.K.A.M. Gugenheim // Illinois J. Math. – 1972. – V.3. – P. 398-418.
5. *May, J. P.* Simplicial objects in algebraic topology / J.P. May – Van Nostred, Math.Studies, 11 -1967 – 162 p.

ANALOG SIMPLICIAL FASES IN A_∞ -CASE

M. Ladoshkin

*Mordovian state pedagogical institute by M.E.Evsevev (Saransk)
430007, Respublika Mordovia, Saransk, st. Studencheskaya, 11a,*

Abstract. In this paper, the problem of constructing an analog of Δ -sets in A_∞ -case. Presented to design the higher faces, we prove their existence on the homology, but also addresses the effect of the differential on this site. In proving the theorems we use the technique of SDR-situations themselves prove constructive.

Keywords. Simplicial object, homotopy stable, SDR-situation, high faces.

УДК 519.632.4

О БЫСТРЫХ МЕТОДАХ ПРИ РЕШЕНИИ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ОКЕАНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В.Е. Волков, В.М. Простокишин, Д.Г. Орловский

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31*

Аннотация. Рассмотрена аппроксимация трёхмерных уравнений несжимаемой жидкости, описывающих океанические течения. Аппроксимация на трёхмерную сетку в фиксированные моменты времени и в приближении «замороженных» коэффициентов обмена сводит описание течений к задаче Дирихле для разностного уравнения Лапласа в кубе. Предложен метод нахождения её решения на множестве узлов трёхмерной сетки в плоских сечениях куба с равномерной по пространству точно-