

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Е.А. Рувинская<sup>1</sup>, О.Е. Куркина<sup>1,2</sup>, А.А. Куркин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
603950, ГСП-41, Нижний Новгород, ул. Минина, 24

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (г. Нижний Новгород)  
603155, г. Нижний Новгород, Б. Печерская, 25/12.

*Аннотация.* Исследована структура физических полей (избыточной плотности, горизонтальной и вертикальной скорости) локализованных стационарных полнотелесных возмущений в трехслойной симметричной жидкости. Проанализированы соотношения «ширина-амплитуда», «скорость-амплитуда» для таких волн и их зависимость от вертикальной координаты. Проводится сопоставление со слаботелесной теорией.

*Ключевые слова.* Солитон, вертикальная мода, нелинейность, модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза

Внутренние волны (ВВ) возникают в стратифицированных по плотности водоемах и распространены повсеместно: в озерах, бесприливных морях, реках, водохранилищах. Множество природных механизмов является источником образования возмущений внутри вод Мирового океана. Это и «деформации» (искажения) поля плотности в местах впадения рек или вблизи тающих ледников, и внезапная смена атмосферного давления, и возникновение колебаний при обтекании неровностей дна баротропным приливом. Существует большое количество исследований, доказывающих важнейшую роль внутренних волн во всех динамических процессах Мирового Океана [1,2,3]. При этом особого внимания заслуживают интенсивные внутренние волны (ИВВ) – волны больших амплитуд с явными признаками нелинейности, в частности, солитоны ВВ, о которых пойдет речь в настоящей статье. Такие интенсивные внутренние волны (ИВВ) необходимо наиболее детально исследовать, так как они являются важным источником сильных течений, вертикального перемешивания и эрозии дна, чему посвящено немало работ. В частности, в [4] утверждается, что прохождение внутренних солибонов может приводить к стократному увеличению диффузии и перемешивания через термоклин. В [5] обсуждается роль ИВВ в создании сдвигов скорости и неустойчивости в придонном слое моря, а также их важная роль в транспорте наносов. Немаловажно и то, что внутренние уединенные волны могут участвовать в распространении загрязнений и примесей на большие расстояния (подобно течениям). Причем наиболее интересны в этом смысле предельные формы солитонов ВВ, представляющие собой волны с широкой плоской вершиной, имеющие максимум в распределении поля горизонтальных скоростей на поверхности и дне жидкости. Моделирование динамики таких волн проводилось многими исследователями для разных гидрологических условий, например в [6] для экспоненциальной стратификации, в [7,8] для двухслойной жидкости, а также в ряде других работ [9,10,11].

В настоящей работе нами будет рассмотрена пространственная структура УВВ в бассейне с трехслойной симметричной стратификацией.

Такая стратификация не типична для открытого океана, но неплохо аппроксимирует профиль плотности воды для ряда морских акваторий. В частности, трехслойная стратификация довольно часто встречается в Балтийском море [12,13]. Изучение волновых

процессов здесь представляет огромный практический интерес в настоящее время ввиду возросшей антропогенной нагрузки на эту акваторию (по дну прокладывается газопровод, ведется разработка месторождений нефти и других полезных ископаемых). Очевидно, одна из основных задач экологического мониторинга – прогноз дрейфа нефтяных пятен, как и инженерная задача оценки волнового воздействия на гидротехнические сооружения, не может быть решена без учета влияния ИВВ.

При этом существует ограниченное количество работ, где рассматривались бы ИВВ в симметричном трехслойной среде. Так, предельные формы солитонов внутренних волн в трехслойном океане были получены еще в [14,15]. Однако в этих работах особенности пространственной структуры УВВ не рассматривались, тогда как без этого невозможен анализ воздействия ИВВ на окружающую среду.

Существует два подхода к моделированию ВВ вообще. Во-первых, использование слабонелинейных моделей, таких как уравнение Кортевега – де Вриза для волн малой амплитуды и модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (МКДВ) для волн конечной амплитуды [16,17], которые несмотря на все достоинства, связанные с разработанным математическим аппаратом и глубокой, детальной изученностью, дают нам весьма идеализированное представление о процессе и результатах эволюции волновых возмущений, неприменимое для описания волн умеренной и большой амплитуды, максимально интересных в прикладных исследованиях [15]. Во-вторых, прямое численное интегрирование полной системы уравнений движения жидкости (Эйлера или Навье – Стокса) для волн большой амплитуды (существенно нелинейных (интенсивных)). Наиболее известные численные модели описаны в [18, 19, 20, 21, 22]. Одна из первых и известных таких моделей – модель, разработанная профессором университета Ватерлоо (Канада) К.Г. Лэмбом, позволяет численно решать полнонелинейную систему уравнений гидродинамики невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска. Модель Лэмба (IGW) активно используется исследователями, как в России, так и за рубежом, является востребованным и надежным вычислительным инструментом. Авторы выражают свою признательность профессору Лэмбу за предоставленную им возможность пользоваться этим программным пакетом.

Программный комплекс численно решает систему уравнений, описывающих движение невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в вертикальной плоскости в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned}\vec{U}_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} - f\vec{v}\vec{i} &= -\vec{\nabla} p - \rho g \vec{k}, \\ v_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} v + fu &= 0, \\ \rho_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\rho = \frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_0}.\tag{2}$$

Эти уравнения решаются в пространстве размерности 2+1, т.е. все физические величины являются функциями  $x$ ,  $z$  и  $t$ . Здесь  $\vec{U} = (u, w)$  - вектор скорости в вертикальной плоскости  $(x, z)$ ,  $u$  – скорость вдоль горизонтальной оси  $x$ ,  $w$  – скорость вдоль верти-

кальной оси  $z$ ,  $v$  – компонента скорости в поперечном направлении  $y$ ,  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  – оператор градиента,  $t$  – время,  $\rho_f$  – плотность морской воды,  $\rho_0$  – постоянная характеристическая плотность (возникает в силу предположения, что плотность воды в исследуемом бассейне меняется незначительно, т. е. в силу приближения Буссинеска:  $\rho_f = \rho_0(1 + \rho)$ ),  $\rho$  – безразмерная величина (аномалия плотности),  $g$  – гравитационное ускорение,  $f$  – параметр Кориолиса,  $\vec{i}$  и  $\vec{k}$  – единичные орты по осям  $x$  и  $z$ .

Модель Лэмба численно решает систему уравнений (1)-(2). Пространственная расчетная область имеет горизонтальный размер  $L$ , вертикальный –  $H$ . Задача решается в области  $\{-L/2 \leq x \leq L/2, -H \leq z \leq 0\}$ . На поверхности океана используется приближение «твердой крышки»  $w = 0$  при  $z = 0$ . Граничное условие на дне ставится как условие непротекания  $w = 0$  при  $z = -H$ . Правая и левая границы являются открытыми.

Процедура численного решения системы основана на неявной предиктор-корректорной двухшаговой конечно-разностной схеме.

Верификация модели была проведена ранее в работах [20, 23, 24]

Центральное место при постановке настоящей задачи занимает вопрос задания начальных условий.

Для инициализации модели необходимо задать горизонтально-однородное невозмущенное поле плотности морской воды  $\rho_{mean}(z)$ , а так же начальное возмущение поля плотности в форме  $\rho(x, z, t = 0) = \rho_{mean}(z - \eta(x))$  и начальное распределение скоростей, которое выбирается исходя из линейной теории длинных волн в соответствии с возмущением плотности.

В настоящей работе инициализация поля плотности в начальный момент времени проводилась следующим образом:

$$\rho_{mean}(z) = -0.005 \tanh\left(\frac{z+30}{4}\right) - 0.005 \tanh\left(\frac{z+70}{4}\right), \quad (3)$$

$$\eta(x, z, t = 0) = F(x)\Phi(z), \quad (4)$$

где  $\Phi(z)$  – решение краевой задачи для вертикальной структуры моды:

$$\begin{cases} \Phi'' + \frac{N^2(z)}{c^2} \Phi = 0, \\ \Phi(0) = \Phi(H) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $c$  – фазовая скорость среды,  $N(z)$  – частота Вайсяля-Брента.

Для сокращения времени адаптации и формирования УВВ  $F(x)$  – горизонтальная структура поля смещений в (5) задавалась как солитон уравнения МКДВ первой моды с известными параметрами:

$$F(x) = a \operatorname{sech} h \left( \sqrt{\frac{\alpha_1 a^2}{6\beta}} x \right). \quad (6)$$

Поскольку солитоны МКДВ являются точными аналитическими решениями уравнений (1) в приближении слабой нелинейности, то при малых амплитудах превращение в полнонелинейный солитон проходит с незначительным изменением параметров волны. Однако при возрастании амплитуды перестройка солитона МКДВ в численную уединенную волну происходит более интенсивно, что, в конечном итоге, делает невозможным образование предельных форм численных уединенных волн из солитонов МКДВ большой амплитуды (у солитонов мкдв нет предельной амплитуды, она возрастает неограниченно, при этом масса остается постоянной). Поэтому для получения предельных форм численных солитонов в рассматриваемой среде нами использовалось возмущение в виде прямоугольного импульса (с достаточной энергией) вида:

$$F(x) = \frac{a}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{(x-x_0)}{d} \right) \right) - \frac{a}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{(x-x_2)}{d} \right) \right). \quad (7)$$

Горизонтальная и вертикальная составляющие скорости задавались в линейном приближении:

$$u(x, z, t = 0) = cF(x) \frac{d\Phi}{dz}, \quad (8)$$

$$w(x, z, t = 0) = -c\Phi(z) \frac{dF}{dx}. \quad (9)$$

Шаг по пространству между узлами сетки, а также шаг по времени выбирались исходя из критерия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви.

Численные эксперименты проводились как для волн понижения, так и для волн повышения уровня. В процессе нелинейной эволюции начальная волна трансформировалась в распространяющийся волновой пакет, причем со временем происходило разделение головной УВВ и осциллирующего следа. Стоит отметить, что критерием формирования УВВ служили оценки изменения параметров, описанные в работе [8].

Рассмотрим качественные особенности пространственной структуры интенсивных внутренних уединенных волн для симметричной трехслойной стратификации и сравним результаты численного моделирования с предсказаниями слабонелинейной теории. Здесь стоит отметить, что, вообще говоря, эволюционные уравнения одномерны по пространству, и для того, чтобы анализировать пространственную структуру решения, необходимо учитывать вертикальную структуру моды. Мы будем рассматривать решение в двумерном пространстве с учетом линейной вертикальной моды и первой нелинейной поправки к ней (рис.1):

$$\eta(x, z) = A(x)\Phi(z) + A^2(x)T_n(z) \quad (10)$$

На рис. 2 слева изображено поле избыточной условной плотности (изопикны) для солитона амплитуды 12.05 м. Для сравнения в поле плотности пунктирными линиями показано также поле солитона мкдв, имеющего такую же амплитуду. Из рис. 2 (слева) очевидно, что полнонелинейная уединенная волна значительно шире солитона мкдв,

то есть имеет предельную амплитуду, по достижении которой начинает расти в ширину. Кроме того, разница между смещениями изопикн в поле солитона ПН и МКДВ выше верхнего интерфейса больше, чем для изопикн, расположенных ниже этого же интерфейса. Тогда как для изолиний аномалии плотности вблизи нижнего интерфейса наблюдается противоположная картина. Асимметрия наблюдается и относительно среднего уровня: если вертикальное смещение ПН на верхнем интерфейсе превосходит смещение МКДВ, то на нижнем интерфейсе наблюдается обратная картина.

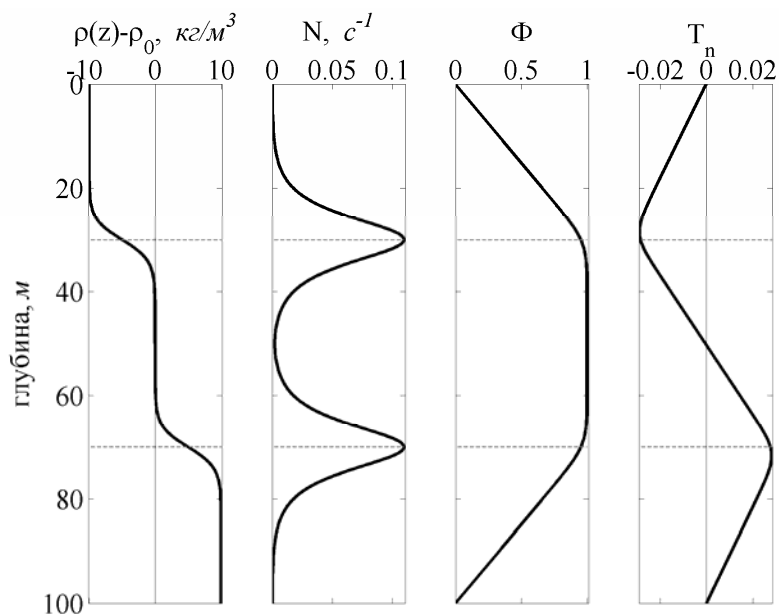


Рис.1. Вид профиля плотности, частоты Вьяйсяля-Брента, вертикальной структуры моды и нелинейной поправки для сглаженной трехслойной симметричной стратификации плотности.

Для сравнения на рис.2 справа изображено поле избыточной плотности солитона МКДВ с учетом и без учета первой нелинейной поправки  $T_n$ . Из рис.2 (справа) видно, что  $T_n$  вносит значительную асимметрию в вертикальную структуру волнового поля.

На рис.3 изображены аналогичные рис.2 вертикальные структуры полей избыточной плотности для солитона с амплитудой 10.03 м. Асимметрия в этом случае менее ярко выражена.

При малых же амплитудах структура решений ПН, МКДВ с учетом и без учета  $T_n$  почти одинакова (нелинейность не играет важной роли)

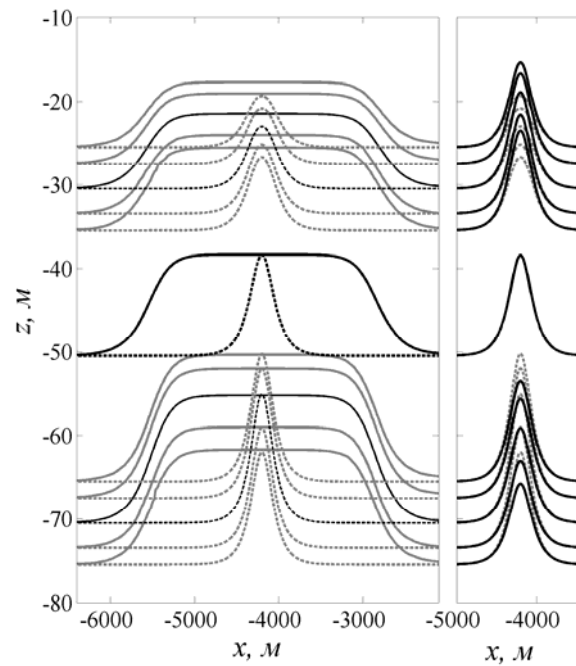


Рис.2. Вертикальная структура поля избыточной плотности для солитона с  $a_m = 12.05$ .  
 Слева: пунктиром показано поле мКдВ солитона;  
 справа: сплошной линией показано решение без учета первой нелинейной поправки.

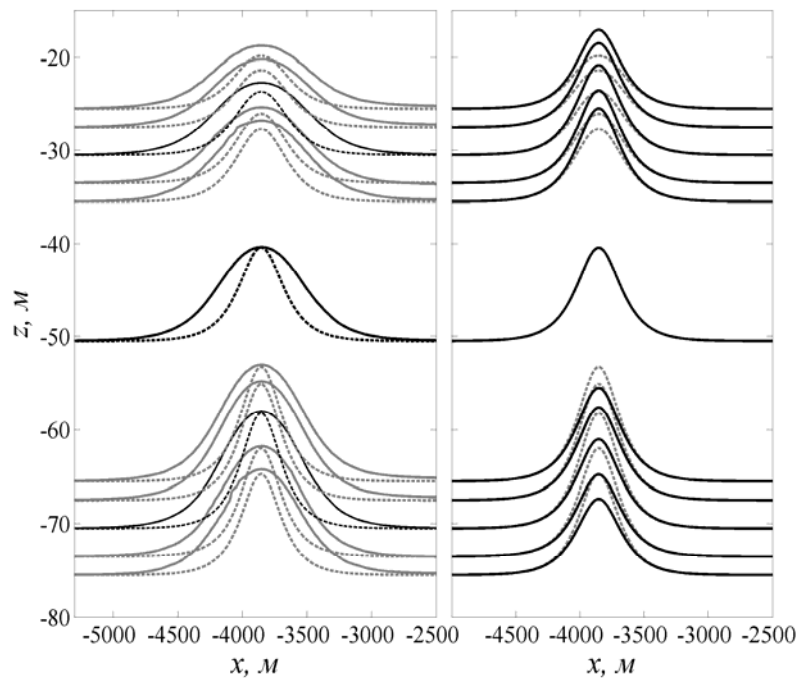


Рис.3. Вертикальная структура поля избыточной плотности для солитона с  $a_m = 10.032$ .  
 Слева: пунктиром показано поле мКдВ солитона;  
 справа: сплошной линией показано решение без учета  $Tn$

Пространственная структура поля горизонтальной скорости характеризуется наличием локальных максимумов на поверхности и дне жидкости, причем разница их значений тем больше, чем больше амплитуда солитона (рис. 4 а, б, в: для случая (в) скорость на поверхности 72.8 см/с (0.4с), на дне -61.2 см/с (0.37с), для случая (б) 32.5 (0.2с) и -31.6 см/с(0.19с) соответственно, для (а) обе равны по 5.46 см/с(0.03с), но имеют разное направление). Также из рис. 4 видно, что в средней части солитона в верхнем и нижнем слое располагаются достаточно обширные области, внутри которых скорости близки к поверхностному и придонному максимуму соответственно, при этом толщина (вдоль оси  $z$ ) верхней области в центре солитона тем меньше толщины нижней, чем больше амплитуда. В среднем слое преобладает более узкая (вдоль оси  $x$ ) область скоростей, сонаправленных со скоростями в верхнем слое, ниже которой располагается более широкая область, охватывающая почти весь диапазон скоростей в нижнем слое. Разница между толщинами (вдоль оси  $z$ ) этих двух областей в среднем слое тем больше, чем меньше амплитуда. Для солитонов отрицательной полярности наблюдается обратная картина.

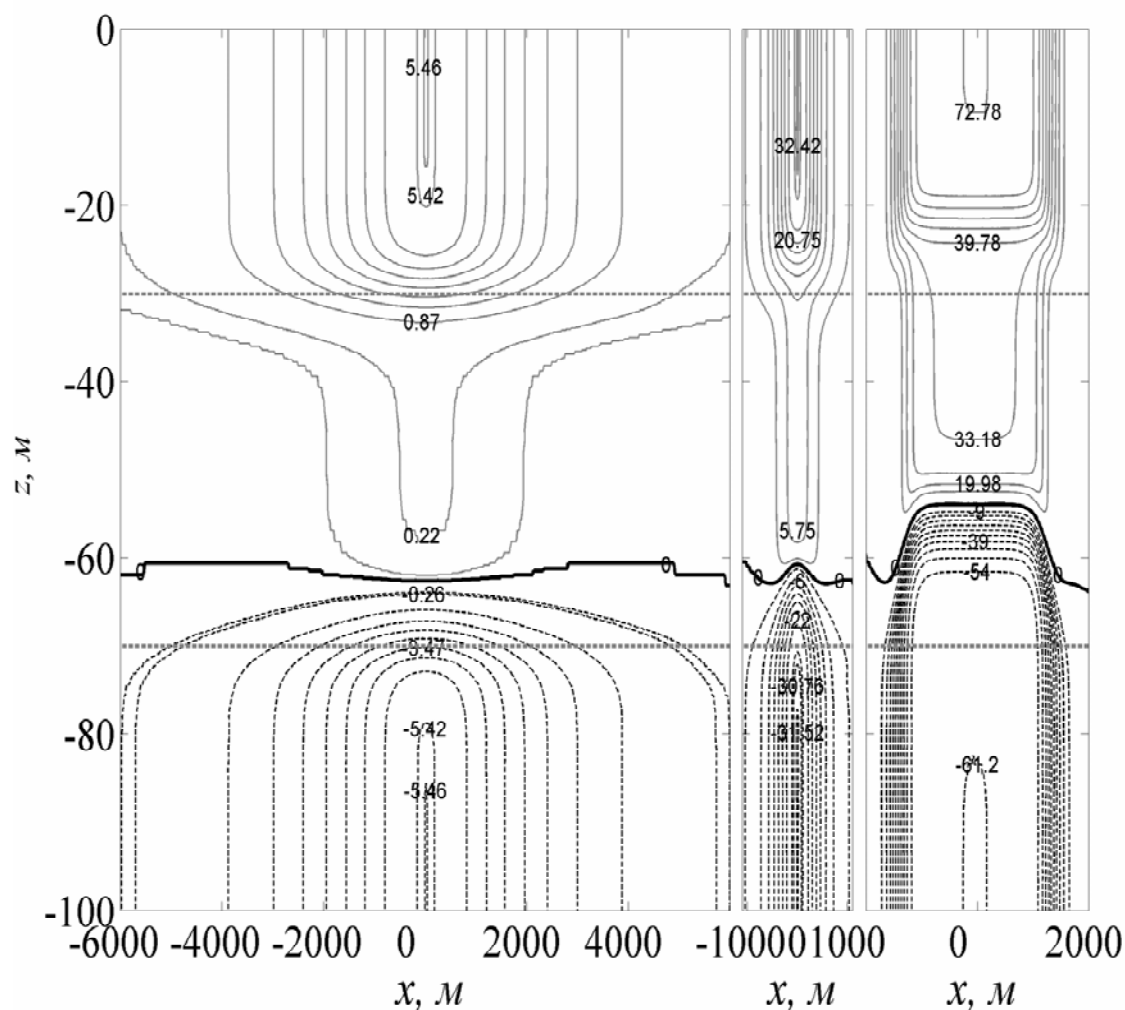


Рис. 4 – Поле горизонтальной скорости в см/с для ПН солитона с амплитудой (а) 0.923 м (б) 5.57 м (в) 12.05 м, распространяющегося в бассейне с глубиной 100 м.

Стоит отметить, что для широкого солитона орбитальная скорость жидких частиц на свободной поверхности в два с небольшим раза меньше фазовой скорости (166.2 см/с), при этом по своей структуре поле горизонтальной скорости внутри такого солитона напоминает плоскопараллельный поток, распространяющийся со скоростью солитона.

Следующая характерная особенность – положение нулевой изолинии горизонтальной скорости в пространстве. Нулевая изотаха в центре солитона расположена на глубине (в) 54.5 м (б) 61.5 м (а) 63.1 м. При удалении от центра она сначала заглубляется до уровня (а,б) 63.5 м/ поднимается до уровня (а) 60.5 м, а затем поднимается до (в) 58.5 м (б) 60.5 м. Таким образом, общее изменение глубины залегания составляет (в) 9 м (0.75а) (б) 2 м (0.36а) (а) 2.5 м (2.7а).

На рис.5 представлено поле вертикальной скорости для солитонов с амплитудами 0.92 м, 5.57 м, 12.05 м. Для предельного солитона линия нулевой скорости имеет загибы вблизи верхнего и нижнего интерфейса, максимумы отстоят друг от друга на большую величину, чем для случая  $a_m = 0.92$  (хотя ширина рассматриваемого солитона с  $a_m = 12.05$  меньше, чем у солитона с  $a_m = 0.92$ ), и поскольку ширина предельного солитона может возрастать неограниченно, области с максимальными вертикальными скоростями могут отодвигаться друг от друга также неограниченно.

Еще один вывод, который может быть сделан из качественного анализа рис.2,3 состоит в том, что ширина интенсивного солитона зависит от глубины. Этот вывод подтверждается количественными оценками. На рис. 6 представлена зависимость  $\lambda$  от  $z$ , определяемая в соответствии с работой [25] как

$$\lambda(z) = \frac{1}{2a(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x, z) dx \quad (11)$$

для пяти УВВ, имеющих амплитуды 0.923 м; 3.82 м; 5.57 м; 10.066 м и 12. 0529 м. Здесь  $\eta(x, z)$  – профиль изопикны. Аналогичная зависимость для солитонов МКДВ этих же амплитуд представлена сплошной линией (черным цветом изображено решение МКДВ без учета  $T_n$ ). Все кривые пронормированы на значение ширины волны на глубине 50 м. Если все кривые солитонов МКДВ монотонны (убывание ширины волны с глубиной), причем, чем больше амплитуда, тем больше убывает ширина волны, то для численных солитонов наблюдается качественно другая зависимость. Наиболее нелинейный характер зависимости длины волны от глубины наблюдается для солитона с амплитудой 0.923 м. Его ширина выше верхнего интерфейса превосходит значение на глубине 50м, на верхнем интерфейсе достигает его, а затем опять становится меньше. Для второй половины бассейна наблюдается обратная картина. Для солитонов больших амплитуд зависимость почти монотонна, причем при увеличении амплитуды ширина волны больше меняется с глубиной. Исключение составляет ИУВВ предельной амплитуды, для которой характер зависимости ширины волны от глубины наиболее близок к линейному.

Зависимость вертикальной структуры численных солитонов от амплитуды представлена на рис.7,8. Вертикальные профили пронормированы на величину, соответствующую максимуму солитона МКДВ, имеющему такую же амплитуду. Профили  $a(z)$  и  $u(z)$  построены для центрального сечения солитона, а кривые  $w(z)$  показывают распределение вертикальной скорости на некотором удалении от центра, где вертикальная

скорость достигает своего максимума. Таким образом, рис. 7, 8 демонстрируют различия между вертикальными структурами ИУВВ и солитонов МКДВ.

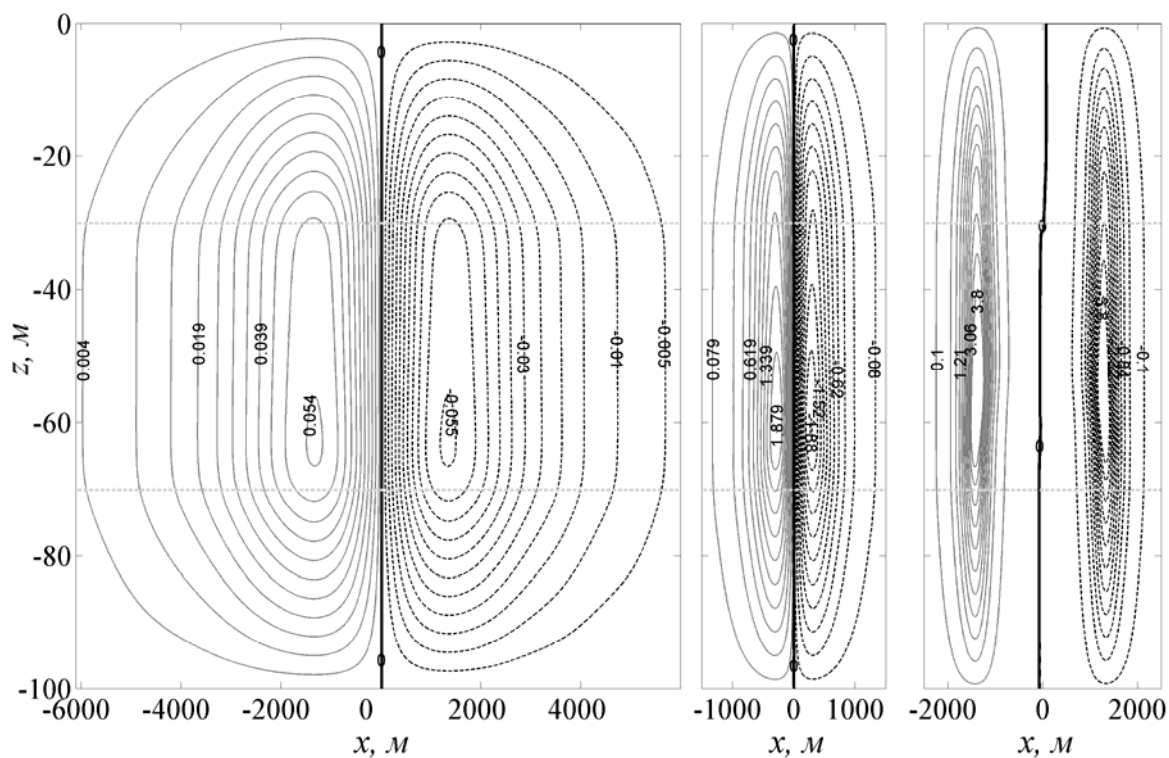


Рис. 5 – Поле вертикальной скорости в см/с для ПН солитона с амплитудой (а) - 0.923 м, (б) - 5.57 м, (в) - 12.05 м, распространяющегося в бассейне с глубиной 100 м.

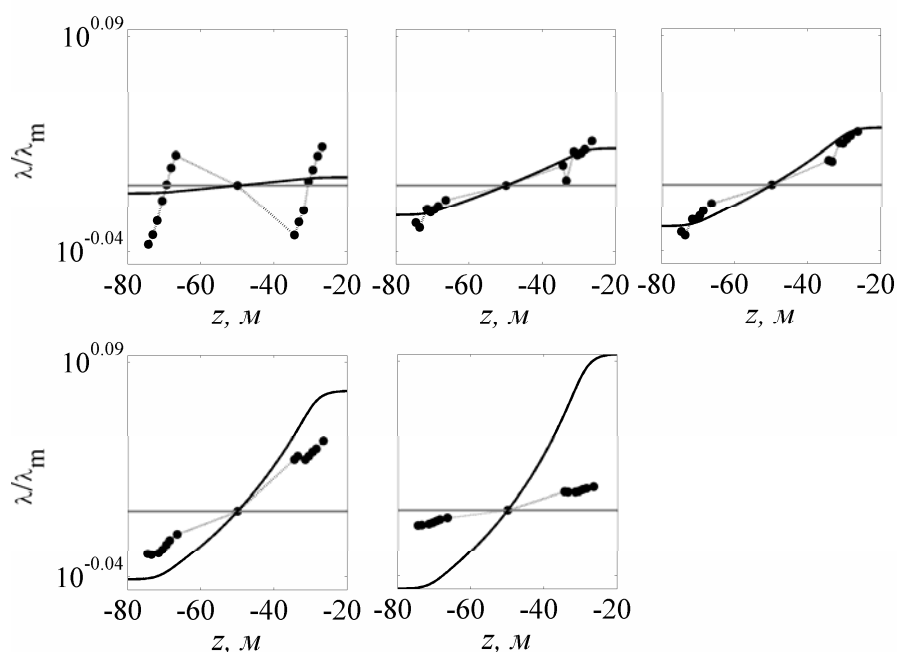


Рис. 6 – Зависимость ширины солитона от глубины, рассчитанная по формуле (11),

для амплитуд: 0.923 м; 3.82 м; 5.57 м; 10.066 м и 12.0529 м  
(нормировка проводилась на значение ширины солитона  
на полуглубине бассейна; пунктир – ПН модель, сплошная – МКДВ)

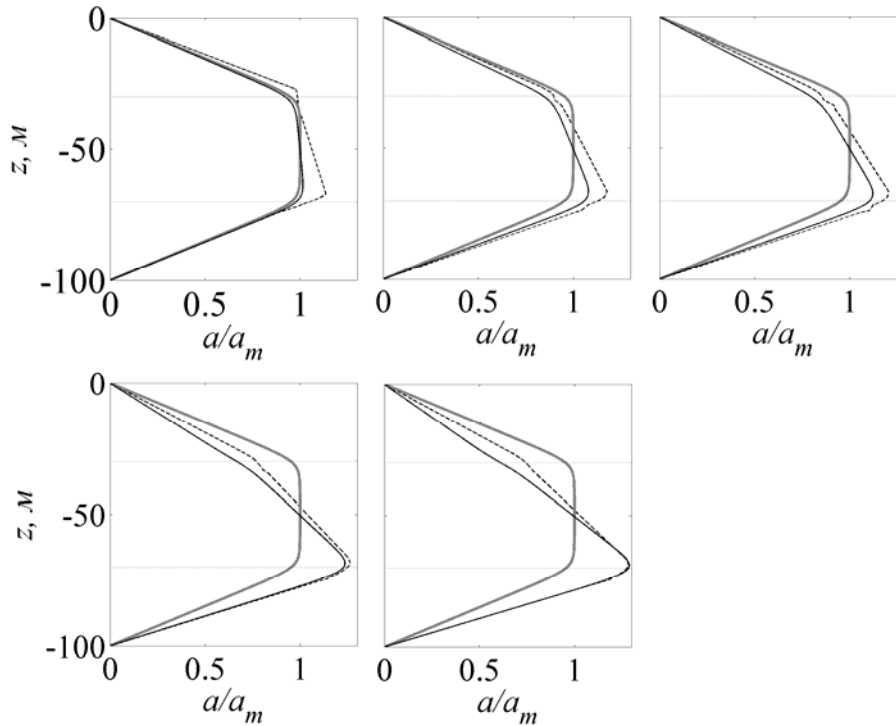


Рис.7. Нормированные вертикальные профили волновых отклонений  
(курсив – ПН модель, сплошная – МКДВ,  
симметричная кривая – вертикальная структура моды)  
для амплитуд: 0.923 м; 3.82 м; 5.57 м; 10.066 м и 12.0529 м  
(нормировка проводилась на значение отклонения  
солитона МКДВ на полуглубине)

Из рис.7 видно, что максимум амплитуды вертикального смещения в центре солитона достигается вблизи нижнего интерфейса, причем это значение для всех ИУВВ, кроме волн предельной амплитуды, больше аналогичных значений солитонов МКДВ.

Отличие профилей горизонтальной скорости численной уединенной внутренней волны возрастает с увеличением амплитуды: УВВ поднимает точку смены знака горизонтальной скорости по сравнению с солитоном МКДВ на тем большую величину, чем больше амплитуда волны, в то же время величина горизонтальной скорости УВВ на свободной поверхности тем больше аналогичного значения для солитона МКДВ, чем больше амплитуда. Поэтому если для волн с  $a_m=0.92$  м есть участки, где профили  $U$  для солитона и УВВ почти совпадают или находятся близко, то оценки скоростей для волн с  $a_m=12.05$  существенно различны. Поведение придонных и поверхностных горизонтальных скоростей будет проанализировано отдельно.

Для вертикальных скоростей разница между профилями вертикальных скоростей солитонов МКДВ и УВВ одной амплитуды также существенно возрастает с увеличением амплитуды. Причем, отличаются не только количественные характеристики (величины скоростей), но и качественная картина волнового профиля. Поэтому из рис. 7, 8

можно сделать вывод о значительном влиянии нелинейности на распределение скоростей внутри солитона.

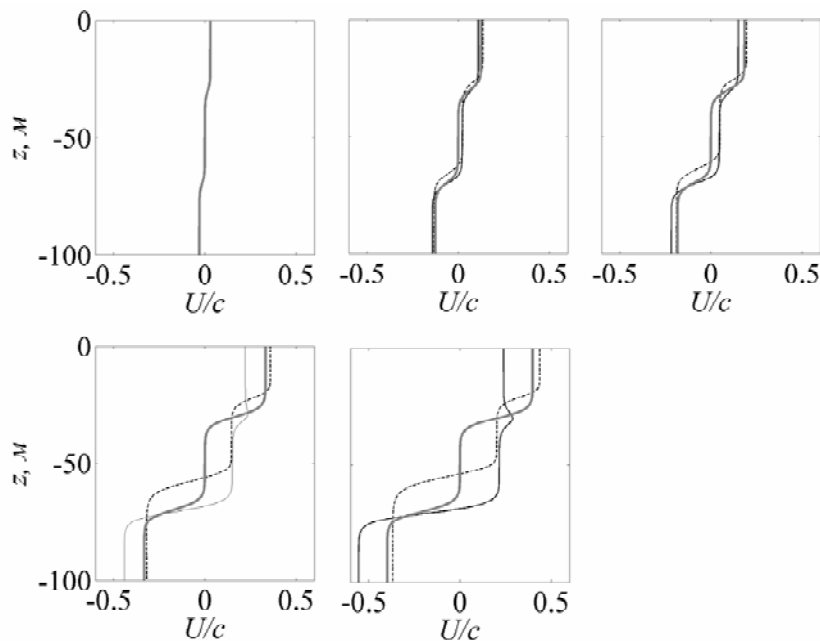


Рис.8. Нормированные вертикальные профили горизонтальных скоростей (курсив – ПН модель, сплошная – МКДВ, симметричная кривая – линейная скорость) для амплитуд: 0.923 м; 3.82 м; 5.57 м; 10.066 м и 12. 0529 м (нормировка проводилась на  $c$ )

В завершение рассмотрим графики придонной и приповерхностной скоростей для солитонов МКДВ и УВВ (рис. 9).

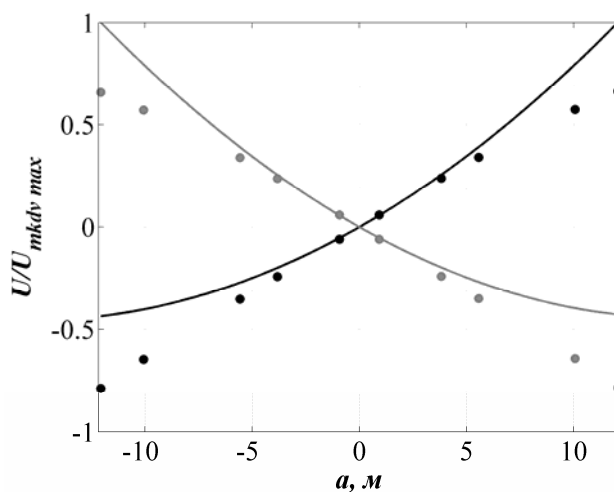


Рис.9 – Нормированные значения придонных (серый) и приповерхностных (черный) скоростей для солитонов МКДВ (сплошная) и УВВ(точки)

Так, для солитонов повышения слабонелинейная теория переоценивает придонные скорости и недооценивает поверхностные, для солитонов понижения наблюдается обратная картина.

Таким образом, в настоящей работе было проведено исследование пространственной структуры УВВ, полученных путем численного интегрирования начальной задачи для полной системы уравнений гидродинамики невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска, и сравнение со слабонелинейными солитонами для трехслойной среды. Доказано, что даже для волн сравнительно небольших амплитуд слабонелинейная теория дает очень неточные оценки волновых характеристик и не может быть применима для волн предельных амплитуд. Выявлена качественно разная структура профиля горизонтальной и вертикальной скорости для УВВ и солитонов МКДВ больших амплитуд, что может быть интересно для разного рода практических задач.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации мероприятия 1.2.1 «Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы, а также при поддержке грантов Президента РФ для молодых российских ученых – докторов наук (МД-99.2010.5), и РФФИ 10-05-00199а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Краусс, В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
2. Морозов, Е.Г. Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. 151 с.
3. Сабинин, К.Д., Коняев К.В. Волны внутри океана. С-П.: Гидрометеиздат, 1992. 272с.
4. Mak Kinnan, J.A., Gregg M.C. Mixing on the late-summer new England shelf-solibores, shear and stratification. Preprint. AGU, 1999. – 4. p.19
5. Bogucki, D., Dikky T., Redekopp L.G. Sediment resuspension and mixing by resonantly generated solitary waves // J. Phys. Oceanogr, 1997.– 7. p.1181 – 1196
6. Maltseva, J.L. Limiting forms of internal solitary waves //J. Offshore Mech. 2003. – 125 № 1. p.76
7. Maltseva, J.L. On asymptotic properties of internal solitary waves in two-layer fluids // Computational technologies. 2000. – 5 № 1. p. 85-92
8. Власенко, В.И., Брандт П., Рубино А. Исследование структуры уединенных внутренних волн большой амплитуды // Морской гидрофиз. журнал, 2000. – 5. с. 15– 31
9. Makarenko, N.I., J. L. Maltseva, and A. Yu. Kazakov Conjugate flows and amplitude bounds for internal solitary waves // Nonlin. Processes Geophys. , 2009. – 16. p. 169–178
10. Duda, T.F., Lynch, J.F., Irish, J.D., Beardsley, J.D., Ramp, S.R., et al. Internal tide and nonlinear wave behavior in the continental slope in the northern South China Sea // IEEE J. Ocean Eng., 2004.– 29. p.1105–1131
11. Helfrich, K.R. and W.K. Melville Long Nonlinear InternalWaves // Annu. Rev. Fluid. Mech., 2006. –38. p. 395–425.
12. Aitsam, A., Hansen H.P., Elken J., Kahru M., Laanemets J., Pa juste M., Pavelson J., Talpsepp L. Physical and chemical variability of the Baltic Sea: a joint experiment in the Gotland Basin // Cont. Shelf Res., 1984. –3. p. 291–310

13. *Soomere, T.* Coupling coefficients and kinetic equation for Rossby waves in multi-layer ocean // *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2003. – 10. p. 385–396
14. *Rus˚as, P.-O. and Grue J.* Solitary waves and conjugate flows in a three-layer fluid // *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 2002. – 21. p. 185–206
15. *Lamb, K.G.* Extreme internal solitary waves in the ocean: Theoretical considerations // *Preprint University of Waterloo*. – 2006. p. 109–117.
16. *Gear, J.A., Grimshaw R.* A second order theory for solitary waves in shallow fluids. // *Phys. Fluids*, 1983. – 26. p. 14 – 29.
17. *Grimshaw, R., Pelinovsky E., Talipova T.* The modified Korteweg - de Vries equation in the theory of large-amplitude internal waves. // *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1997. – 4, No. 4. p. 237 - 350.
18. *Канарская, Ю.В.* Негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 01.02.05 - механика жидкости, газа и плазмы. Киев, Украина, 2004. 126с.
19. *Grue, J., Friis A., Palm E., Rusas P.-O.* A method for computing unsteady fully nonlinear interfacial waves // *J. Fluid Mech.*, 1997. – 351. p. 223.
20. *Lamb, K.* Numerical experiments of internal wave generation by strong tidal flow across a finite amplitude bank edge // *J. Geoph. Res.*, 1994. – 99, C1. p. 843-864.
21. *Vlasenko, V., Stashchuk N., Hutter K., Sabinin K.* Nonlinear internal waves forced by tides near the critical latitude. // *Deep-Sea Research I*, 2003. – 50. p. 317–338
22. *Brown, D.J., Christie D.R.* Fully Nonlinear Solitary Waves in Continuously Stratified Incompressible Boussinesq Fluids // *Phys. Fluids*, 1998. – 10. p. 2569–2586
23. *Lamb, K.* Numerical simulations of stratified inviscid flow over a smooth obstacle // *J. Fluid Mech*, 1994. – 260. p. 1–22.
24. *Lamb, K., Yan L.* The evolution of internal wave undular bores: comparisons of a fully nonlinear numerical model with weakly nonlinear theory. // *J. Phys. Oceanography*. – 1996. – 26. p. 2712–2734.
25. *Koop, C.G., Butler G.* An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* – 1981. – 112 .p. 225–251

## **INVESTIGATION OF THE STRUCTURE OF LARGE AMPLITUDE INTERNAL SOLITARY WAVES IN A THREE-LAYER FLUID**

**E. Rouvinskaya, O. Kurkina, A. Kurkin**

*Nizhny Novgorod state technical university  
25/12, St. Minina, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

*Abstract.* The structure of physical fields (density anomaly, horizontal and vertical velocity) of localized stationary full-nonlinear disturbances in the symmetric three-layer fluid is examined. Wavelength–amplitude and phase speed–amplitude relationship depending on vertical coordinate are analyzed for these waves. The comparison with weakly-nonlinear theory is also carried out.

*Key words.* Soliton, vertical mode, nonlinearity, the modified Korteweg - de Vries equation

УДК 535.31

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОГО ФАЗОВОГО ТРАНСПАРАНТА**

**Е.В. Бурый, Д.А. Семеренко**

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5*

*Аннотация.* Обоснована целесообразность применения фазового транспаранта для формирования псевдослучайных реализаций отсчетов поля интенсивностей излучения при изучении свойств корреляционной функции 6-го порядка этого поля. Предложен способ построения фазового транспаранта, основанный на применении ячеек, заполненных нематическим жидким кристаллом, в которых реализована переменная величина зазора между стеклами с прозрачными электродами. Показано, что технологичная в изготовлении ячейка с клиновидным зазором обеспечивает реализацию требуемых величин фазового сдвига, а система таких последовательно расположенных ячеек позволит увеличить число формируемых статистически независимых реализаций отсчетов поля интенсивностей излучения.

*Ключевые слова:* жидкий кристалл, корреляционная функция, фазовый транспарант

### **Введение**

В задачах исследования характеристик корреляционных функций (КФ) высших порядков поля излучения возникает необходимость формирования независимых реализаций поля когерентного излучения и получаемых реализаций отсчетов интенсивностей, используемых для построения КФ [1 – 4].

Широко применяемый способ формирования таких реализаций поля когерентного излучения, основанный на прохождении когерентного излучения лазера через стеклянный диск с односторонним матированием [2], не позволяет сформировать реализации отсчетов поля интенсивностей, полностью удовлетворяющих требованиям их статистической независимости при одновременном выполнении условия сохранения фазовых соотношений КФ 6-го порядка. Имеющее место частичное нарушение фазовых соотношений для КФ 6-го порядка обусловлено особенностями взаимодействия когерентного излучения с микронеровностями шероховатой поверхности стеклянного диска.

Альтернативным решением является применение фазового транспаранта, обеспечивающего псевдослучайное изменение фазы излучения в различных областях сечения луча, проходящего через этот транспарант. Такой транспарант можно реализовать, используя жидкокристаллические ячейки.

### **Оптические свойства жидких кристаллов, обеспечивающие возможность построения фазового транспаранта**

Жидкие кристаллы (ЖК) находят широкое применение в различных приложениях оптоэлектроники. Наиболее широко используются термотропные ЖК, физические свойства которых зависят от температуры. Разновидностью термотропных ЖК является