HYPERBOLIC EQUATION

M. Petrova, V. Trifonenkov

National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. The singularly perturbed quasilinear hyperbolic equations are considered. The existence of the solutions of moving front type, having contrast structure is proved. The asymptotic expansion of the moving interior layer solution is built based on the boundary layer function method. The equation for moving front velocity was obtained. Important case of quasi-discrete nonlinearities was considered.
Key words: singularly perturbed hyperbolic equations, asymptotics, contrast structures.

УДК 552.578.2.061.43.001.573

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РАСТУЩЕЙ ТРЕЩИНЫ

Ю.Н. Гордеев, В.М. Простокишин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Построены точные решения автомодельных задач о поле давления в окрестности распространяющейся трещины гидроразрыва. Считается, что трещина развивается по корневому закону в проницаемой упруго деформируемой пористой среде, с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины. Рассматриваемая задача для уравнения пьезопроводности заменой переменных сведена к решению смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца, решение которой выражается в квадратурах от функции Бесселя. Полученное решение справедливо для произвольного автомодельного распределения давления на берегах трещины.

Ключевые слова: автомодельность, гидроразрыв, проницаемая пористая среда, уравнение Гельмгольца.

При исследовании процесса гидравлического разрыва пласта возникает необходимость расчета нестационарного поля давления жидкости в окрестности движущейся трещины гидроразрыва [1, 2, 5, 7]. В предположении, что пласт и жидкость упруго деформируемые, распределение давления в пласте описывается уравнением теплопроводности («пьезопроводности») [7]. Трещина в данной задаче считается тонкой областью (разрезом), вытянутой вдоль оси Ox и распространяющейся со временем по закону $ct^{1/2}$, на которой задано давление $p_1(xt^{-1/2})$, отличное от начального пластового давления p_0. Задача заключается в нахождении возмущения внутрипластового поля давления, вызванного развитием трещины гидроразрыва.

Следует отметить, что в настоящий момент интерес к данной проблеме вырос в связи с задачами интенсификации процессов нефтедобычи, в частности, повышения нефтеотдачи пласта. Точные решения были получены в работах [5, 1, 2] в частном случае приближения “идеальной” трещины [5], когда давление закачки жидкости в трещину постоянно и однородно вдоль трещины.

1. Постановка задачи о распространении плоской трещины гидроразрыва с заданным расходом жидкости разрыва.

Рассмотрим гидравлический разрыв проницаемого пласта с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины. Давление жидкости вне трещины описывается уравнением пьезопроводности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right), \; -\infty < x < \infty, \; y \ge 0, \; t > 0, \tag{1.1}$$

$$p(x, y, t=0) = p_0, \; p(x, y=0, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} p_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + p_0, \; |x| \le l(t)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y=0, t) = 0, \; |x| > l(t), \; l(t) = c\sqrt{t} \;,$$

где $p(x,y,t)$ — функция давления жидкости разрыва, (x,y) — декартовые координаты, t —время, κ —коэффициент пьезопроводности, $l(t)$ — длина трещины, а c — параметр, характеризующий скорость распространения трещины.

Расклинивающая сила, которая действует на берега трещины гидроразрыва, имеет следующий вид

$$F = 2\int_0^{l(t)} \frac{1}{\sqrt{t}} p\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = const \;. \tag{1.2}$$

2. Автомодельное решение. Легко видеть, что решение задачи (1.1)-(1.2) оказывается автомодельным в том случае, когда, например, границы трещины растут по корневому закону. Переходя к новым автомодельным переменным (X,Y), а также параметру задачи ε по формулам:

$$x = \frac{cX\sqrt{t}}{\varepsilon}, \; y = \frac{cY\sqrt{t}}{\varepsilon}, \; \varepsilon = \frac{c}{2\sqrt{\kappa}}, p = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(p_1(0) - p_0\right)\Phi(X,Y) + p_0,$$

получим для функции $\Phi(X,Y)$, учитывая условия симметрии, следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + 2X\frac{\partial \Phi}{\partial X} + 2Y\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + 2\Phi = 0 \;, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \Phi(X,0)=\gamma(X), \ |X|\le\varepsilon, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}(X,0)=0, \ |X|>\varepsilon. \end{cases} \tag{2.2}$$

Представим далее функцию $\Psi(X,Y)$ как произведение

$$\Psi=\exp\left(\frac{1}{2}\left(X^2+Y^2\right)\right)\Phi(X,Y) \ ,$$

тогда задача (2.1)-(2.2) может быть преобразована к следующему виду:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}-(X^2+Y^2)\Psi=0 \ , \tag{2.3}$$

$$\Psi(X,0)=\exp\left(\frac{1}{2}X^2\right)\gamma(X), \ 0\le X\le\varepsilon \ ,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial Y}(X,Y=0)=0, \ X>\varepsilon, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial X}(X=0,Y)=0, \ Y>0. \tag{2.4}$$

Введем комплексные переменные и производные по ним:

$$z=X+iY, \ \overline{z}=X-iY, \ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \ \frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

тогда уравнение (2.3) приводится к виду:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z^2\partial\overline{z}^2}-\frac{1}{4}\Psi=0$$

Возвращаясь к действительным переменным:

$$\frac{1}{2}z^2=\xi+i\eta=\frac{X^2-Y^2}{2}+iXY, \ \frac{1}{2}\overline{z}^2=\xi-i\eta=\frac{X^2-Y^2}{2}-iXY,$$

получим уравнение (2.3) в новых действительных переменных ξ,η в виде

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\eta^2}-\Lambda=0, \ \Lambda(\xi,\eta)=\Psi(x,y), \tag{2.5}$$

Описанное преобразование переводит первый квадрант (X>0, Y>0) в верхнюю полуплоскость (η>0). При этом задача (2.3)-(2.4) и, следовательно, и исходная задача (2.1)-

(2.2) перейдет в смешанную краевую задачу для уравнения Гельмгольца со следующими условиями:

$$\Lambda(\xi,\eta=0)=\exp(\xi)\gamma(\sqrt{2\xi}),\ 0\le\xi\le 0.5\varepsilon^2;$$
$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}(\xi,0)=0,\ \xi\in(-\infty,0]\cup[0.5\varepsilon^2,\infty). \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.5)-(2.6) сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа [3;4;6] и выражается через функцию Бесселя от мнимого аргумента:

$$\Lambda(u,v)=\varphi(u,v)+\int_0^v\frac{\partial}{\partial v}I_0(\sqrt{v^2-w^2})\varphi(u,w)dw,$$

Здесь функция $\varphi(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией ($\Delta\varphi=0$).

3. Решение краевой задачи (2.5)-(2.6). В [4] показано, что решение задачи (2.5)-(2.6) даётся выражением

$$\Lambda(\xi,\eta)=\varphi(\xi,\eta)+\int_0^\eta\frac{\partial}{\partial\eta}I_0(\sqrt{\eta^2-w^2})\varphi(w,\xi)dw,$$

и гармоническая функция $\varphi(\xi,\eta)$ удовлетворяет следующей граничной задаче:

$$\Delta\varphi=0$$
$$\varphi(\xi,0)=\Lambda(\xi,0),\ 0\le\xi\le 0.5\xi^2;$$
$$\frac{\partial\varphi}{\eta}(\xi,\eta=0)=0,\ \xi\in(-\infty,0]\cup[0.5\varepsilon^2,\infty). \tag{3.1}$$

Для решения задачи (3.1) для гармонической функции $\varphi(\xi,\eta)$, ($\eta>0$) введем комплексную функцию V такую, что:

$$V'=\frac{dV}{dz}=\frac{d\varphi}{d\xi}-i\frac{d\varphi}{d\eta},\ z=\xi+i\eta.$$

Из (3.1) следует, что эта функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\operatorname{Re}V'(\xi,0)=\frac{d}{d\xi}(\exp(\xi)\gamma(\sqrt{2\xi})),\ 0\le\xi\le 0.5\xi^2;$$
$$\operatorname{Im}V'(\xi,0)=0,\ \ \xi\in(-\infty,0]\cup[0.5\varepsilon^2,\infty). \tag{3.2}$$

Решение полученной задачи (3.2) определяется формулой Келдыша - Седова [6]:

$$V' = \frac{-i}{\pi\sqrt{z(0.5\varepsilon^2 - z)}} \int\limits_0^{0.5\varepsilon^2} \frac{\sqrt{t(0.5\varepsilon^2 - t)}\,\mathrm{Re}V'(t,0)}{t-z} dt + \frac{iA}{\pi\sqrt{z(0.5\varepsilon^2 - z)}}, \quad (3.3)$$

Принимая во внимание тот факт, что давление жидкости на бесконечности ограничено, положим A=0. Интегрируя выражение (3.3) по переменной z, получим $\varphi(\xi,0)=V_1(\xi,\eta=0)$:

$$\phi(\xi) = (\exp(\xi)\gamma(\sqrt{2\xi})), \quad (3.4)$$

$$\varphi(\xi,0) = \begin{cases} \phi(\xi), \quad 0 \le \xi \le 0.5\xi^2 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{0.5\xi^2} \arcsin\left(\frac{-4t\xi + \varepsilon^2(\xi+t)}{\varepsilon^2(\xi - t)}\right)\phi'(t)dt, \\ \qquad \xi \in (-\infty, 0] \cup [0.5\varepsilon^2, \infty). \end{cases} \quad (3.5)$$

Рассмотрим пределы:

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi\to\pm\infty} \arcsin\left(\frac{-4t\xi + \varepsilon^2(\xi+t)}{\varepsilon^2(\xi-t)}\right) = \arcsin\frac{\varepsilon^2 - 4t)}{\varepsilon^2}, \\ &\lim_{\xi\to\frac{\varepsilon}{2}+0,0-0} \arcsin\left(\frac{-4t\xi + \varepsilon^2(\xi+t)}{\varepsilon^2(\xi-t)}\right) = \pm\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) и условия непрерывности функции $\varphi(\xi,0)$ следует, что константа при интегрировании определяется выражением

$$C = 0.5(\phi(0.5\varepsilon^2) + \phi(0)).$$

Для удобства вычисления функции $\varphi(\xi,\eta)$ представим $\varphi(\xi,0)$ с учетом (3.4),(3.5), в виде

$$\phi(\xi) = \phi_0 + \phi_1(\xi),$$

$$\phi_1(\xi) = \begin{cases} \phi(\xi) - \phi_0, \quad 0 \le \xi \le 0.5\xi^2, \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{0.5\xi^2} \arcsin(\Psi(\xi,t))\phi'(t)dt, \\ \qquad \xi \in (-\infty, 0] \cup [0.5\varepsilon^2, \infty), \end{cases}$$

где

$$\Psi(\xi,t)=\frac{2\sqrt{2t(\varepsilon^2-2t)}}{\varepsilon^4(\xi-t)}\left[\xi(\varepsilon^2-4t)\left(1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{2\xi}}\right)+\varepsilon^2 t\right],$$

$$\phi_0=0.5(\phi(0.5\varepsilon^2)+\phi(0)+\frac{1}{\pi}\int_0^{0.5\varepsilon^2}\arcsin(1-\frac{4t}{\varepsilon^2})\phi'(t)dt.$$

Используя краевое условие для функции $\varphi(\xi,0)$, по формуле Пуассона получим решение задачи Дирихле

$$\varphi(\xi,\eta)=\phi_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\phi_1(\rho)}{(\rho-\xi)^2+\eta^2}d\rho.$$

Теперь, возвращаясь к переменным (X,Y), получим выражение для Φ:

$$\Phi(X,Y)=\exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{2}\right)\Lambda\left(\frac{X^2-Y^2}{2},XY\right). \tag{3.7}$$

В направлении распространения трещины Y=0, т.е. вдоль оси Ox, решение (3.7) упрощается и может быть выражено в виде одного интеграла:

$$\Phi(X,0)=\begin{cases}\gamma(X), & 0\le X\le\varepsilon,\\ \dfrac{e^{\frac{X^2}{2}}}{\pi}\left[\displaystyle\int_0^{\varepsilon^2/2}\arcsin(\frac{-4tX^2+\varepsilon^2(X^2+2t)}{\varepsilon^2(X^2-2t)})\phi'(t)dt+C\right], & X>\varepsilon.\end{cases}$$

Аналогично, и в направлении, ортогональном распространению трещины, при X=0, т.е. вдоль оси Oy:

$$\Phi(0,Y)=\frac{e^{-\frac{Y^2}{2}}}{\pi}\left[\int_0^{\varepsilon^2/2}\arcsin(\frac{-4tY^2+\varepsilon^2(Y^2-2t)}{\varepsilon^2(Y^2-2t)})\phi'(t)dt+C\right],\ \mathrm{Y}>0.$$

Отметим, что в частном случае, когда

$$\gamma(X)=\frac{\mu}{\pi}\exp(-\frac{X^2}{2}),\ |X|\le\varepsilon\ ,$$

получается решение типа диффузионного расплывания фиксированной массы вещества M, где константа μ может быть определена через массу M:

$$\Phi(X,Y) = \frac{\mu}{\pi}\exp(-\frac{X^2+Y^2}{2}).$$

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009-2013 годы ГК П1109

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт, Г.И.* О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. // ПММ, т.XX, вып. 4, 1956. С. 475-486.
2. *Баренблатт, Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. //М.: Недра, 1984. 211 с.
3. *Гордеев, Ю.Н., Ентов В.М.* О распределении давления в окрестности растущей трещины // ПММ, т.61, вып. 6, 1997. С. 1060-1064.
4. *Гордеев, Ю.Н., Сандаков А.Е.* О распределении давления в окрестности растущей трещины с постоянной расклинивающей силой // Известия РАН, МЖГ. 2006, № 4. С. 121-126.
5. *Желтов, Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР, ОТН, 1955, №5. С.3-41.
6. *Мусхелишвили, Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости..// М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Щелкачев, В.Н.* Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде// Докл. АН СССР, т.52, №2б 1946. С. 103-106.

FUCTIONALLY INVARIANT PROBLEM SOLUTIONS OF THE NEAR GROWING CRACK PRESSURE FIELD DISTRIBUTION

Yu. Gordeev, V. Prostokishin

National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. Exact solution of similar problems on the pressure field in the vicinity of the propagating fracture are demonstrated. It is assumed that the crack develops on square-root law in a permeable elastically deformable porous medium with a constant disjoining forces acting on the crack coasts. The considered problem for the piezo-conductivity equation by changing of variables has been reduced to solving a mixed boundary problem for the Helmholtz equation. Solution is expressed by the integral of Bessel functions. The resulting solution is valid for any self-similar pressure distribution on the crack.
Key words: selfsimilar solution, scaling, hydraulic fracturing, porous medium, permeability, Helmholtz equation.