

УДК 517.965.35

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М.А. Петрова, В.П. Трифоненков

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Исследуются сингулярно возмущенные квазилинейные уравнения гиперболического типа. Доказывается существование у них решений типа бегущих волн, имеющих контрастную структуру. С помощью метода пограничных функций построено асимптотическое разложение по малому параметру решения в случае движения внутреннего слоя (фронта). Получено уравнение для определения скорости распространения фронта волны. Рассматривается важный для приложений частный случай квазидискретной нелинейности.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные гиперболические уравнения, асимптотика, контрастные структуры.

В последнее время большое внимание было привлечено к уравнениям в частных производных с дискретными нелинейностями. Они возникают при моделировании широкого круга явлений и процессов в различных областях физики, химии, биологии, медицины (описание динамики волн плотности заряда в кристаллах и нелинейных кристаллических решетках, описание процессов в случае дискретного распределения источников реакции и т.д.) [1, 2]. В настоящей работе рассматривается квазилинейное волновое уравнение, имеющее решение с движущимся внутренним слоем, в общем случае. Исследуется вопрос о влиянии сильной неоднородности в нелинейности на характер движения фронта волны.

Движения фронтов описываются уравнением

$$V_{tt} + \beta V_t = D V_{xx} + \alpha \delta(x) f(V), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

где β - коэффициент диссипации, D - коэффициент диффузии, α - амплитуда дискретной нелинейности, а функция $f(V)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1. $f(V)$ - непрерывно дифференцируемая функция, имеющая положительный максимум и отрицательный минимум, имеющая три нуля

$$V_1 < V_2 < V_3, \text{ такие, что } f(V_i) > 0, \quad i = 1, 3, \quad f(V_i) < 0 \text{ и } \int_{V_1}^{V_3} f(V) dV = 0.$$

(Для простоты и без ограничения общности считаем далее $V_1 = -1$, $V_2 = 0$, $V_3 = 1$)

После введения безразмерных пространственных и временных переменных с учетом порядка входящих в уравнение параметров, получим следующую сингулярно возмущенную задачу, в случае отсутствия диссипации:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = q(x) f(u) \quad (1)$$

в области $G = \{(x, t): -\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ с граничными условиями:

$$u(-\infty, t) = -1, \quad u(+\infty, t) = 1, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $f(u)$ – удовлетворяет **Условию 1**.

Условие 2. Функция $q(x) > 0$ и $q(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$.

Начальные условия не задаются, так как в настоящей работе нашей задачей являлось исследование динамики контрастных структур, а не вопросы их формирования.

При $q(x) = \text{const}$ в [3] было доказано существование у задачи (1)-(2) решений типа бегущих волн, имеющих контрастную структуру, которые распространяются с постоянной скоростью, равной начальной. Так при $q(x) = 1$ и $f(u) = u^3 - u$ точное решение поставленной задачи имеет вид $u(x, t) = \text{th}\left(\frac{(x - ct)}{\varepsilon \sqrt{2(1 - c^2)}}\right)$.

В настоящей работе рассматривается случай $q(x) \neq \text{const}$. Особое внимание уделяется случаю, когда функция $q(x)$ является непрерывным аналогом дискретной функции $\sum \delta(x - x_k)$, что соответствует дискретным источникам реакции.

Рассмотрение велось при следующем предположении. Пусть существует решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)-(2) для всех $(x, t) \in G$ с внутренним переходным слоем типа «ступенька» и такое, что имеет место следующий предельный переход:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < s(t) \\ +1 & \text{при } s(t) < x < +\infty \end{cases},$$

где $s(t)$ – некоторая достаточно гладкая функция.

Значения $s(t)$ при каждом конкретном t соответствуют точке перехода (будем называть ее фронтом волны), а функция $s_t = \frac{ds}{dt}$ будет тогда соответствовать скорости движения фронта.

Асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) по малому параметру будем строить с помощью метода пограничных функций [4]. Для этого в районе переходного слоя введем новую переменную $z = \frac{x - s(t)}{\varepsilon}$. Запишем уравнение (1) в новых переменных для функции $U(z, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon)$. Представим функции $U(z, t, \varepsilon)$ и $q(s + \varepsilon z)$ в виде ряда по ε . Приравнявая члены при одинаковых степенях ε , получим задачи для определения членов асимптотики.

В нулевом приближении получим задачу:

$$U_{zz}^0 (1 - s_t^2) = q(s) f(U^0), \quad (3)$$

$$U^0(-\infty, t) = -1, \quad U^0(+\infty, t) = 1.$$

Решение этой задачи существует, единственно и, например, при $f(u) = u^3 - u$ имеет вид:

$$U^0(z, t, \varepsilon) = \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{q(s)}{2(1-s_t^2)}} z \right).$$

Таким образом, главный член асимптотики по ε решения задачи (1)-(2) определен, и в случае, например, кубической нелинейности приобретает вид:

$$u_0(x, t, \varepsilon) = \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{q(s)}{2(1-s_t^2)}} \cdot \frac{x-s(t)}{\varepsilon} \right).$$

Для членов первого и последующих приближений получаем линейные неоднородные уравнения. Из условия разрешимости для первого приближения (ортогональность правой части решению соответствующего однородного уравнения), получим уравнение для движения фронта волны:

$$s_t = \pm \sqrt{1 - cq(s)}, \quad (4)$$

где c – константа интегрирования, определяемая начальными условиями.

Одновременно с построением асимптотики доказывается

Теорема. Пусть выполнены условия 1,2 и пусть функция $s(t)$ удовлетворяет уравнению (4). Тогда функция $u_0(x, t, \varepsilon)$, являющаяся решением задачи (3), удовлетворяет задаче (1)-(2) с невязкой $O(\varepsilon)$.

В случае квазидискретного распределения источников реакции, описываемых функцией $q(x) = \sum \exp(-b(x - x_k)^2)$, $b \gg 1$, получим:

$$s_t = \sqrt{1 - \sum \exp(-b(x - x_k)^2)}.$$

Таким образом, наблюдается существенное отличие в случаях однородной и неоднородной нелинейностях. Особенно ярко это проявляется для случая квазидискретной неоднородности, где функция $q(x)$ играет роль некоего потенциального барьера для движения фронта волны. Скорость фронта невелика в районе максимума $q(x)$, и наоборот, происходит значительное ускорение в области резкого изменения функции $q(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Keener, J.P. Homogenization and propogation in the bistable equation. // Physica D, 136: 1-17, 2000.
2. Keizer, J., Smith G.D., Ponce Dawson S., Pearson J.E. Saltatory propagation of Ca^{2+} waves by Ca^{2+} sparks. // Biophys. J., 75: 595-600, 1998.
3. Васильева, А.Б., Петрова М.А. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных уравнениях гиперболического типа. // Труды вторых математических чтений МГСУ, 1994, Изд-во «Союз», С. 26-29.
4. Васильева, А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. // М.: Высш. школа, 1990.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF ONE SINGULARLY PERTURBED

HYPERBOLIC EQUATION

M. Petrova, V. Trifonenkov

National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. The singularly perturbed quasilinear hyperbolic equations are considered. The existence of the solutions of moving front type, having contrast structure is proved. The asymptotic expansion of the moving interior layer solution is built based on the boundary layer function method. The equation for moving front velocity was obtained. Important case of quasi-discrete nonlinearities was considered.

Key words: singularly perturbed hyperbolic equations, asymptotics, contrast structures.

УДК 552.578.2.061.43.001.573

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РАСТУЩЕЙ ТРЕЩИНЫ

Ю.Н. Гордеев, В.М. Простокишин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Построены точные решения автомодельных задач о поле давления в окрестности распространяющейся трещины гидроразрыва. Считается, что трещина развигается по корневому закону в проницаемой упруго деформируемой пористой среде, с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины. Рассматриваемая задача для уравнения пьезопроводности заменой переменных сведена к решению смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца, решение которой выражается в квадратурах от функции Бесселя. Полученное решение справедливо для произвольного автомодельного распределения давления на берегах трещины.

Ключевые слова: автомодельность, гидроразрыв, проницаемая пористая среда, уравнение Гельмгольца.

При исследовании процесса гидравлического разрыва пласта возникает необходимость расчета нестационарного поля давления жидкости в окрестности движущейся трещины гидроразрыва [1, 2, 5, 7]. В предположении, что пласт и жидкость упруго деформируемые, распределение давления в пласте описывается уравнением теплопроводности («пьезопроводности») [7]. Трещина в данной задаче считается тонкой областью (разрезом), вытянутой вдоль оси Ox и распространяющейся со временем по закону $ct^{1/2}$, на которой задано давление $p_l(xt^{1/2})$, отличное от начального пластового давления p_0 . Задача заключается в нахождении возмущения внутрипластового поля давления, вызванного развитием трещины гидроразрыва.