2. *Chistyakov, V.V*. Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation // Monatsh. Math. 2002. V. 137. №2. P. 99-114.
3. *Chistyakov, V.V., Solycheva O.M*. Lipschitzian Operators of Substitution in the Algebra ΛBV // J. of Diff. Equations and Appl. 2003. V. 9. №3/4. P. 407-416.
4. *Dyachenko, M.I., Waterman D*. Convergence of double Fourier series and *W*–classes // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. V. 357. №1. P. 397-407.
5. *Hildebrandt, T.H*. Introduction to the theory of integration. New York and London: Academic press, 1963. 361 p.
6. *Matkowski, J., Miś J*. On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the $BV[a,b]$ // Math. Nachr. 1984. V. 117. P. 155-159.
7. *Waterman, D*. On Λ–bounded variation // Studia Math. 1976. V. 57. №1. P. 33-45.

FUNCTIONS OF TWO VARIABLES OF FINITE Λ–VARIATION AND SUPERPOSITION OPERATORS

E. Gromov, O. Solycheva, V. Tyutin

National Research University – Higher School of Economics, Nizhny Novgorod
25/12, Bol. Pecherscaya, Nizhny Novgorod, 603155, Russia

Abstract. Our paper is devoted to the description of the superposition operators which map on function spaces of finite variation. We present the results which develop and generalize the recent researches by J. Matkowski, J. Mis, D. Waterman and V.V. Chistyakov: we introduce the notion of a total (two-dimensional) Λ–variation for functions of two real variables and show that the Waterman class of these functions with finite total variation is a Banach space. Also, we give the description of the Lipschitzian superposition (Nemytskii) operator mapping the Wateman class into itself.
Keywords: functions of two variables, Waterman Λ–variation, Nemytskii superposition operator, Lipschitz condition.

УДК 517.9

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА, ПОСТРОЕННОЙ ПО ПОЛУГРУППЕ ОПЕРАТОРОВ

М.Ю. Романова

Воронежский государственный университет
394006, Воронеж, Университетская пл., 1

Аннотация. В статье рассматривается сильно непрерывная полугруппа операторов, которая является гиперболической (или допускает экспоненциальную дихотомию). Для исследуемой полугруппы операторов строится функция Грина, которая играет важную роль в представлении слабых ограниченных решений дифференциальных

уравнений. Используя частотную характеристику оператора и интегральный критерий качества дихотомии, в статье получены оценки функции Грина, построенной по гиперболической полугруппе операторов. Результаты данной статьи получены с существенным использованием методов гармонического анализа.
Ключевые слова: гиперболическая полугруппа операторов, экспоненциальная дихотомия, функция Грина.

Пусть H - комплексное гильбертово пространство, $EndH$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H.

Пусть линейный оператор $A: D(A) \subset H \to H$ является генератором (инфинитезимальным оператором) сильно непрерывной полугруппы операторов, $T: \mathrm{R}_+ = [0, \infty] \to EndH$, т.е. полугруппы класса C_0 [9].

Обозначим через $R(\cdot, A): \rho(A) \to EndH$ резольвенту оператора A, т.е. $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$, где $\rho(A) = \mathrm{C} \setminus \sigma(A)$ - его резольвентное множество, символом $\sigma(A)$ обозначается спектр оператора A и I - тождественный оператор в H.

Полугруппа операторов $T: \mathrm{R}_+ \to EndH$ называется *гиперболической* (или допускающей *экспоненциальную дихотомию*), если выполнено условие

$$\sigma(T(1)) \bigcap \mathrm{T} = \varnothing \tag{1}$$

где $\sigma(T(1))$ - спектр оператора $T(1)$ и $\mathrm{T} = \{\lambda \in \mathrm{C} : |\lambda| = 1\}$.

Необходимые и достаточные условия гиперболичности групп и некоторых классов полугрупп операторов были получены в статье [2].

Далее в статье будем рассматривать гиперболическую полугруппу $T: \mathrm{R}_+ \to EndH$. Условие гиперболичности (1) полугруппы T гарантирует, что выполнено свойство

$$\sigma(A) \bigcap (i\mathrm{R}) = \varnothing \tag{2}$$

и величина

$$\gamma(A) = \sup_{\xi \in \mathrm{R}} \|R(i\xi, A)\| < \infty . \tag{3}$$

Соответствующий результат содержится в статье [3].

Более того, в [3] доказано, что совместное выполнение условий (2), (3) эквивалентно условию (1).

Пусть выполнено условие гиперболичности (1) полугруппы T. Тогда спектр оператора $T(1)$ представим в виде

$$\sigma(T(1)) = \sigma_{int} \bigcup \sigma_{out} , \tag{4}$$

где

$$\sigma_{int} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| < 1\},$$

$$\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| > 1\}.$$

Поэтому гильбертово пространство *H* представимо в виде прямой суммы

$$H = H_{int} \oplus H_{out}$$

замкнутых подпространств $H_{int} = ImP_{int}$, $H_{out} = ImP_{out}$, $P_{out} = I - P_{int}$ (образы проекторов), где проектор Рисса P_{int} построен по спектральной компоненте σ_{int}, т.е. определяется формулой

$$P_{int} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}} R(\lambda,(T(1))d\lambda. \qquad (5)$$

Лемма 1. *Подпространства* H_{int}*,* H_{out} *инвариантны относительно операторов* $T(\tau), \tau \geq 0$.

Доказательство. Используя формулу (5), получаем равенства

$$\begin{gathered} T(\tau)P_{int} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}} T(\tau)R(\lambda,(T(1))d\lambda = \\ (-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}} R(\lambda,(T(1))d\lambda))T(\tau) = P_{int}T(\tau), \tau \geq 0 \end{gathered},$$

означающие перестановочность операторов $T(\tau), \tau \geq 0$ с проектором P_{int} (и, следовательно, с P_{out}). При этом используется факт перестановочности оператора $T(\tau)$ и резольвенты [9, 355]. Поэтому подпространства H_{int}, H_{out} инвариантны относительно операторов $T(\tau), \tau \geq 0$. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет рассмотреть две полугруппы операторов

$$T_{int} : \mathrm{R}_{+} = [0,\infty] \to EndH_{int}, T_{out} : \mathrm{R}_{+} = [0,\infty] \to EndH_{out},$$

$$T_{\mathrm{int}}(t) = T(t)|H_{\mathrm{int}}, T_{out}(t) = T(t)|H_{out}, t \geq 0.$$

Следовательно, $T(t) = T_{\mathrm{int}}(t) \oplus T_{out}(t), t \geq 0$, относительно разложения $H = H_{\mathrm{int}} \oplus H_{out}$.

Поскольку $\sigma(T_{\mathrm{int}}(1)) = \sigma_{\mathrm{int}}, \sigma(T_{out}(1)) = \sigma_{out}$, то $r(T_{\mathrm{int}}(1)) < 1, T_{out}(1)$- непрерывно обратимый оператор, и $r(T_{out}(1)^{-1}) < 1$(здесь и далее через $r(B)$ обозначен спектральный радиус оператора *B*). Из этих оценок следует (см. [3])существование постоянных $M_1, M_2 \geq 1, \gamma_1, \gamma_2 > 0$, таких, что

$$\|T_{\mathrm{int}}(t)\| \leq M_1 e^{-\gamma_1 t}, \|T_{out}(t)^{-1}\| \leq M_2 e^{-\gamma_2 t}, t \geq 0. \qquad (6)$$

При этом полугруппа $T_{out}(t), t \geq 0$, допускает расширение на R до группы операторов, обозначаемой тем же символом T_{out} (полагается $T_{out}(t) = T_{out}(-t)^{-1}, t < 0$ [3]).

Для гиперболической полугруппы операторов $T : R_{+} = [0, \infty] \to EndH$ определим функцию $G = G_A : R \to EndH$ следующим образом:

$$G_A(\tau) = \begin{cases} -T(\tau)P_{\text{int}}, \tau \geq 0; \\ T_{out}(-\tau)^{-1} P_{out}, \tau < 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения функции G_A и оценок (6) следует

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$\|G_A(\tau)\| \leq M_0 e^{-\gamma_0|\tau|}, \tau \in R \tag{7}$$

где $M_0 \geq 1, \gamma_0 > 0$ - некоторые постоянные.

Оценка (7) отмечалась, например, в [3],[1], [10].

Построенная (в условиях гиперболичности полугруппы T) функция G_A играет важную роль в представлении слабых ограниченных решений дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax + f(t), t \in R, \tag{8}$$

где функция f принадлежит банахову пространству $C_b(R, H)$ непрерывных ограниченных функций, определённых на R и со значениями в H с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in R} \|x(t)\|, x \in C_b(R, H)$.

Под *слабым решением* уравнения (8) понимается непрерывная функция $x : R \to H$,такая, что для всех $s < t$ из R выполняются равенства:

$$x(t) = T(t-s)x(s) - \int_s^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

В статье [1] установлено, что уравнение (8) имеет единственное (слабое) решение $x \in C_b(R, H)$ для любой функции $f \in C_b(R, H)$, и оно представимо в виде

$$x(t) = \int_R G_A(t-\tau)f(\tau)d\tau, t \in R \ . \tag{9}$$

По этой причине функцию G_A называют функцией Грина [5](G_A - ядро интегрального оператора, являющегося обратным к дифференциальному $L = -\frac{d}{dt} + A$, рассматриваемому в пространстве $C_b(R, H)$ [1]).

Из формулы (9) следует оценка:

$$\|x\|_\infty \le (\int_R \|G_A(\tau)\| d\tau)\|f\|_\infty \ .$$

Из неё следует важная роль оценки величины $\|G_A\|_1 = \int_R \|G_A(\tau)\| d\tau$. Она может быть вычислена через постоянные M_0, γ_0 из (7). Однако в лемме 2 утверждается только существование таких постоянных в оценках (7).

В данной статье для оценки величины $\|G_A\|_1$ используются следующие величины:

$$\gamma(A) = \sup_{\lambda \in R} \|R(i\lambda, A)\|,$$

$$\nu(A) = \sup_{\|x\| \le 1} \frac{1}{2\pi} \int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda,$$

$$k(T) = \sup_{0 \le t \le 1} \|T(t)\|. \ .$$

Величина $\gamma(A)$ важна тем, что даёт точное равенство $\|L^{-1}\| = \gamma(A)$ для нормы обратного оператора к дифференциальному оператору $L = -d/dt + A : D(L) \subset L^2(R,H) \to L^2(R,H)$, рассматриваемому в гильбертовом пространстве $L^2(R,H) = L^2$ измеримых функций $x : R \to H$,для которых конечна величина $\|x\|_2 = (\int_R \|x(t)\|^2 dt)^{1/2}$, со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \int_R (x(t), y(t))_H dt, x, y \in L^2 \ .$$

Величина $\gamma(A)$ использовалась для оценок норм обратных к дифференциальным операторам в статьях [1],[8]. В работе [8] она называлась *частотной характеристикой оператора* A.

В статье [1] для $A \in EndH$ получена оценка:

$$\|L^{-1}\|_\infty \le 4(\gamma(A) + \|A\|_\infty \gamma(A)^2), \tag{10}$$

где $\|L^{-1}\|_\infty$ - норма обратного к оператору $L = -d/dt + A : D(L) \subset C_b(R,H) \to C_b(R,H)$.

В монографии [4] для $A \in EndH$, где H - конечномерное пространство, использовалась величина $\nu(A)$, называемая *интегральным критерием качества дихотомии,* и была получена следующая оценка:

$$\|G_A(t)\| \le (2\|A\|\nu(A))^{1/2} e^{-\frac{|t|}{2\nu(A)}}. \tag{11}$$

В частности, из (11) следует, что $\|G_A\|_1 \le 4\sqrt{2}(\|A\|)^{1/2}\nu(A)^{3/2}$.

Существенным недостатком оценок (10), (11) является использование величины $\|A\|$. Условие ограниченности оператора A было снято в статье [3], вместо величины $\|A\|$ в оценках стала использоваться величина $k(T)$, при этом стали применяться отличные от известных методы оценок.

Отметим ещё полученную в [10] оценку

$$\gamma(A) \le \nu(A) \ .$$

Результаты данной статьи получены с существенным использованием методов гармонического анализа. В частности, используется тождество Планшереля для функций из $L^2(R,H)$ и преобразование Фурье для векторных функций.

При оценках рассматриваемых далее интегралов учитывается, что подинтегральные выражения либо суммируемы, либо принадлежат $L^2(R,H)$.

В статьях [2], [3] получена

Лемма 3. *Если выполнено условие (1) (эквивалентные ему условия (2), (3)), то имеют место равенства*:

$$\int_R G_A(t)xe^{-i\lambda t}dt = R(i\lambda, A)x, \lambda \in R, \tag{12}$$

$$\int_R \|G_A(t)x\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda, \lambda \in R, \tag{13}$$

для всех $x \in H$.

Доказательство. Для каждого вектора $x \in H$ рассмотрим функцию $t \mapsto G_A(t)x : R \to H$.

Непосредственно из определения функции G_A следует, что она непрерывна, исключая точку нуль и суммируема (см. оценку (7)).

В частном случае, если T экспоненциально убывающая полугруппа операторов, то $G_A(t) = -T(t), t \ge 0, G_A(t) = 0, t < 0$. В этом случае равенство (12) хорошо известно, обычно оно приводится в любой монографии по теории полугрупп операторов (см., например, [9, 354]).

Непосредственно из вида функции Грина G_A следует, что она является прямой суммой двух полугрупп операторов (одной из которых является T_{int}) относительно разложения $H = H_{\mathrm{int}} \oplus H_{out}$.

Имеют место равенства:

$$\int_R G_A(t)xe^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{0} T_{out}(-t)^{-1}P_{out}xe^{-i\lambda t}dt - \int_0^{\infty} T_{\mathrm{int}}(t)P_{\mathrm{int}}xe^{-i\lambda t}dt =$$
$$R(i\lambda, A)P_{out}x + R(i\lambda, A)P_{\mathrm{int}}x = R(i\lambda, A), x \in R.$$

При этом учитывалось, что $T_{out}: R \to EndH_{out}$ - группа операторов, причём $T_{out}(t)^{-1} = T_{out}(-t), t \geq 0$.

Из теоремы Планшереля [7, 349] следует принадлежность каждой из функций

$$\lambda \mapsto R(i\lambda, A)x : R \to H, x \in H$$

гильбертову пространству $L^2(R, H)$ и выполнение равенства:

$$\int_R \|G_A(t)x\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda.$$

Лемма доказана. Краткий вариант доказательства леммы 3 приведён в [2].

Отметим, что из равенства (13) леммы 3 следует $\nu(A) < \infty$. Действительно, поскольку функция G_A допускает оценку (7), то $\|G_A(\tau)\|^2 \leq M_0^2 e^{-2\gamma_0|\tau|}, \tau \in R$. Тогда в силу равенства (13) получаем:

$\dfrac{1}{2\pi}\int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda = \int \|G_A(\tau)x\| d\tau \leq \dfrac{M_0^2}{\gamma_0}\|x\|$. Таким образом, $\nu(A) \leq \dfrac{M_0}{\sqrt{\gamma_0}} < \infty.$

Аналогичные оценки верны для резольвенты генератора A^* сопряжённой полугруппы T^*. При этом $\|G_A(t)^*\| = \|G_A(t)\|, t \in R.$. Следовательно, $\nu(A^*) = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \dfrac{1}{2\pi}\int_R \|R(i\lambda, A^*)x\|^2 d\lambda < \infty.\cdot$

Формулу (12) можно трактовать следующим образом: для каждого вектора $x \in H$ функция $\lambda \mapsto R(i\lambda, A)x$ (принадлежащая гильбертову пространству $L^2(R,$ измеримых и суммируемых с квадратом нормы функций, определённых на R со значениями в H)является преобразованием Фурье функции $t \mapsto G_A(t)x : R \to H$. Формулу (13) можно рассматривать как тождество Планшереля для указанных функций. Следовательно, функция $t \mapsto G_A(t)x$ допускает представление вида (где интеграл понимается в смысле главного значения)

$$G_A(t)x = \frac{1}{2\pi}\int_R R(i\lambda, A)xe^{i\lambda t} d\lambda, t \in R, x \in H, \tag{14}$$

т.е. является обратным преобразованием Фурье от функции $y(\lambda) = R(i\lambda, A)x, \lambda \in R.$
Из (14) для любых $x, y \in H$ получаем:

$$(G_A(t)x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_R (R(i\lambda, A)x, y)e^{i\lambda t} d\lambda, t \in R.$$

Из тождества Гильберта [6] для резольвенты оператора A следует, что подынтегральная функция $\varphi_{x,y}(\lambda) = (R(i\lambda, A)x, y), \lambda \in R$ дифференцируема, и её производная

$\varphi'_{x,y}(\lambda) = (iR(i\lambda, A)^2 x, y), \lambda \in R.$ Следовательно, из (14), учитывая суммируемость функции $t \mapsto (G_A(t)x, y) : R \to C$, получаем равенство:

$$(itG_A(t)x, y) = \frac{i}{2\pi}\int_R (R(i\lambda, A)^2 x, y)e^{i\lambda t} d\lambda, t \in R. \tag{15}$$

Из этого равенства вытекает, что имеет место

Лемма 4. *Функция* G_A *допускает оценку вида*:

$$\|G_A(t)\| \le \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{|t|}, t \ne 0. \tag{16}$$

Доказательство. Используя неравенство Шварца, из отмеченного выше и (14), получаем (благодаря свойствам преобразования Фурье) равенства

$$|(itG_A(t)x, y)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_R (R(i\lambda, A)^2 x, y)e^{i\lambda t} d\lambda\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_R |(R(i\lambda, A)^2 x, y)| d\lambda \le$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_R |(R(i\lambda, A)x, R(-i\lambda, A^*)y)| d\lambda \le \frac{1}{2\pi}\int_R \|R(i\lambda, A)x\| \|R(-i\lambda, A^*)y\| d\lambda \le$$
$$(\frac{1}{2\pi}\int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda)^{1/2} (\frac{1}{2\pi}\int_R \|R(i\lambda, A^*)y\|^2)^{1/2} d\lambda \le$$
$$\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1, x, y \in H.$$

В силу произвольности выбора $x, y \in H$ положим $y = itG_A(t)x$, тогда

$$\|itG_A(t)x\|^2 \le \sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}\|x\| \|itG_A(t)x\|.$$

Следовательно, $\|G_A(t)\| \le \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{|t|}, t \ne 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть оператор* $B \in EndH$ *таков, что*

$$\|B\|\gamma(A) < 1.$$

Тогда $A + B$ - генератор гиперболической полугруппы операторов $\widetilde{T} : R \to EndH$ и имеют место оценки

$$\gamma(A + B) \le \frac{\gamma(A)}{1 - \|B\|\gamma(A)}, \tag{18}$$

$$\nu(A + B) \le \frac{\nu(A)}{(1 - \|B\|\gamma(A))^2}. \tag{19}$$

Доказательство. Оператор $A+B$ (в силу [9], [6]) является генератором некоторой полугруппы операторов $\widetilde{T}$ класса C_0. Докажем, что условие (17) гарантирует выполнение свойства $\sigma(A+B)\cap(iR)=\varnothing$.

Из представления $A+B-i\lambda I=(I+BR(i\lambda,A))(A-i\lambda I),\lambda\in R$ следует (ввиду выполнения условия (17)), что $\sigma(A+B)\cap(iR)=\varnothing$ и резольвента оператора $A+B$ на мнимой оси iR имеет вид:

$$R(i\lambda,A+B)=R(i\lambda,A)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(BR(i\lambda,A))^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(BR(i\lambda,A))^nR(i\lambda,A),\lambda\in R. \tag{20}$$

Из этого представления получаем оценку:

$$\gamma(A+B)=\sup_{\lambda\in R}\|R(i\lambda,A+B)\|\le\sup_{\lambda\in R}\|R(i\lambda,A)\|\frac{1}{1-\|B\|\gamma(A)}=\frac{\gamma(A)}{1-\|B\|\gamma(A)},$$

т.е. верна оценка (18). Из (20) также получаем, что

$$\nu(A+B)=\frac{1}{2\pi}\sup_{\|x\|\le1}\int_R\|R(i\lambda,A+B)x\|^2d\lambda\le$$
$$\frac{1}{2\pi}\sup_{\|x\|\le1}\int_R\left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(R(i\lambda,A)B)^n\right\|^2\|R(i\lambda,A)x\|^2d\lambda\le\frac{1}{(1-\|B\|\gamma(A))^2}\nu(A),$$

т.е. доказана оценка (19). Лемма доказана.

Теорема 1. *Функция Грина* $G_A:R\to EndH$ *допускает оценки вида*

$$\|G_A(t)\|\le\frac{1}{|t|}\frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1-\alpha\gamma(A))^2}e^{-\alpha|t|},t\ne0 \tag{21}$$

Для любого числа $\alpha>0$, *удовлетворяющего условию* $\alpha<\frac{1}{\gamma(A)}$. *В частности*

$$\|G_A(t)\|\le\frac{4}{|t|}\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}e^{-\frac{|t|}{2\gamma(A)}},t\ne0 \tag{22}$$

Доказательство. Пусть число $\alpha>0$ удовлетворяет условию $\alpha<\frac{1}{\gamma(A)}$. Тогда в силу леммы 5 оператор $A+\alpha I$ является генератором гиперболической полугруппы операторов $\widetilde{T}(t)=T(t)e^{\alpha t}$, где $t\ge0$ и $\nu(A+\alpha I)\le\frac{\nu(A)}{(1-\alpha\gamma(A))^2}$.

Теперь из леммы 4 (оценка (16)) получаем оценку:

$$\|G_{A+\alpha I}(t)\| \le \frac{\sqrt{\nu(A+\alpha I)\nu(A^*+\alpha I)}}{|t|}, t \ne 0.$$

Заметим, что $\|G_{A+\alpha I}(t)\| = \|-\widetilde{T}(t)P_{\text{int}}\| = \|-T(t)e^{\alpha t}P_{\text{int}}\| = \|e^{\alpha t}G_A(t)\|$ при $t > 0$.

Если $t > 0$, то из выше приведённых оценок и оценки (19) получаем:

$$\|G_A(t)\| = e^{-\alpha t}\|G_{A+\alpha I}(t)\| \le \frac{1}{t}\frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1-\alpha\gamma(A))^2}e^{-\alpha t}.$$

Для $t < 0$ рассматривается оператор $A - \alpha I$, и аналогичным образом получается оценка:

$$\|G_{A-\alpha I}(t)\| \le \frac{\sqrt{\nu(A-\alpha I)\nu(A^*-\alpha I)}}{|t|}, t \ne 0.$$

Следовательно,

$$\|G_A(t)\| \le \frac{1}{t}\frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1-\alpha\gamma(A))^2}e^{\alpha t}, t < 0.$$

Таким образом, получена оценка (21). Оценка (22) следует из (21), если положить $\alpha = \frac{1}{2\gamma(A)}$. Теорема доказана.

Из определения величины $k(T)$ и оценок функции G_A из работы [3] получаем, что имеет место

Теорема 2. *Функция Грина* $G_A : R \to EndH$ *допускает оценки вида*

$$\|G_A(t)\| \le \begin{cases} M_- e^{\gamma_- t}, t \in [-1,0); \\ M_+ e^{-\gamma_+ t}, t \in [0,1]; \\ \frac{1}{|t|}\frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1-\alpha\gamma(A))^2}e^{-\alpha|t|}, |t| \ge 1, \end{cases}$$

где

$$M_+ = 2\vartheta k(T)(1+\frac{1}{2\vartheta})^2, M_- = 2\vartheta k(T)(1-\frac{1}{2\vartheta})^2,$$

$$\gamma_+ = \ln(1+\frac{1}{2\vartheta}), \gamma_- = -\ln(1-\frac{1}{2\vartheta}), \vartheta = 1+\sqrt{2}(k(T)+k^2(T)\gamma^2(A)), 0 < \alpha < \frac{1}{\gamma(A)}.$$

Поскольку в теореме 2 использовались оценки функции Грина на $[-1,1]$ из статьи [3], то сравнение полученных нами оценок и оценок из [2] проведём на промежутке $R\setminus[-1,1]$, при этом будем рассматривать пример экспоненциально устойчивой полугруппы T, т.е. $G_A(t)=-T(t), t\ge 0, G_A(t)=0, t<0.$ В этом случае при $\alpha=\dfrac{1}{2\gamma(A)}$ из теоремы 2 получаем:

$$\int\limits_{|t|\ge 1}\|G_A(t)\|dt=\int\limits_1^\infty\|T(t)\|dt\le\int\limits_1^\infty\frac{1}{t}\frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1-\dfrac{1}{2\gamma(A)}\gamma(A))}e^{-\frac{1}{2\gamma(A)}t}dt\le 8\gamma(A)\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}. \tag{23}$$

Из теоремы 6 статьи [3] следуют оценки:

$$\int\limits_{t\ge 1}\|T(t)\|dt\le\frac{M_+}{\gamma_+}=\frac{2\vartheta k(T)(1+\dfrac{1}{2\vartheta})^2}{\ln(1+\dfrac{1}{2\vartheta})}\ . \tag{24}$$

Сразу отметим, что в оценках (23), (24) используется только одна общая константа $\gamma(A)$. Предположим, что A - самосопряжённый отрицательно определённый оператор со спектром $(-\infty,\delta]$, где $\delta<0$, причём $\delta\in\sigma(A)$. Тогда, используя нормальность оператора $R(i\lambda,A)$, получаем

$$\|R(i\lambda,A)\|=\frac{1}{dist(i\lambda,\sigma(A))}=\frac{1}{|i\lambda-\delta|}.$$

Следовательно,

$$\gamma(A)=\frac{1}{\delta},\nu(A)=\nu(A^*)\le\int\limits_R\|R(i\lambda,A)\|^2d\lambda=\int\limits_R\frac{d\lambda}{\lambda^2+\delta^2}=\frac{\pi}{\delta},k(T)=1$$

(полугруппа T в этом случае будет сжимающей), $\vartheta=1+\sqrt{2}(1+\frac{1}{\delta^2})$ Если число $(-\delta)\ge 1,$ причём достаточно большое, то очевидно, что правая часть оценки (23) может быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, $1+\sqrt{2}\le\vartheta\le 1+2\sqrt{2}$, и поэтому правая часть из (24) всегда больше величины

$$\frac{2(1+\sqrt{2})}{\ln(1+\dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})})}$$

Отметим, что полученные в теоремах 1-2 оценки не используют условие ограниченности оператора A.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков, А.Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов - Функциональный анализ и его приложения, 1996 - Т. 30. №3. С. 1-11.
2. *Баскаков, А.Г., Воробьёв, А.А., Романова М.Ю.* Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова. - Математические заметки, 2011. - Т. 89. №2. С.190-203.
3. *Баскаков, А.Г., Синтяев, Ю.Н.* Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений.- Дифференциальные уравнения, 2010. - Т. 46. №2. С.1-10.
4. *Годунов, С.К.* Современные аспекты линейной алгебры.- Новосибирск: Научная книга, 1997. – 390с.
5. *Далецкий, Ю.Л., Крейн, М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - Наука, М., 1970. – 536с.
6. *Данфорд, Н., Шварц, Дж.* Линейные операторы. Общая теория. Т.1. - Наука, М., 1962. – 896с.
7. *Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. - Наука, М., 1976. – 544с.
8. *Перов, А.И.* Частотные признаки существования ограниченных решений - Дифференциальные уравнения, 2007.- Т.43. №7.- С.896-904.
9. *Хилле, Э., Филипс, Р.* Функциональный анализ и полугруппы.- Наука, М., 1962. – 892с.
10. *Chicone, C., Latushkin, Y.* Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equatio

ESTIMATIONA OF GREEN'S FUNCTION BASED ON SEMIGROUP OF OPERATORS

M. Romanova

Voronezh State University,
Universitetskaya pl.,1, Voronezh, 394006, Russia

Abstract. In this article the strongly continuous semigroup is considered, this semigroup is hyperbolic (or admits exponential dichotomy). For investigated semigroup the Green's function is built, which plays a great role in presentation of weak bounded solution of differential equations. Using frequency characteristic of operator and integral performance criterion of dichotomy the article provides estimations of Green's function based on hyperbolic semigroup of operators. The results of this article are obtained with use of harmonic analysis's methods.

Key words: hyperbolic semigroup of operators, exponential dichotomy, Green's function.