

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

**ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ КОНЕЧНОЙ Λ -ВАРИАЦИИ
И ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ**

Е.М. Громов, О.М. Солычева, В.В. Тютин

*Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики
в Нижнем Новгороде
603155, Нижний Новгород, 25/12*

Аннотация. Работа посвящена актуальной тематике описания операторов суперпозиции, действующих на функциональных пространствах конечной вариации. В ней представлены результаты, развивающие и обобщающие недавние исследования Я. Матковского, Я. Мища, Д. Уотермана, В. В. Чистякова: введено понятие полной двумерной Λ -вариации функций двух действительных переменных, показано, что класс Уотермана функций двух переменных конечной полной Λ -вариации образует банахово пространство. Также приведено описание генератора оператора суперпозиции типа Немыцкого, действующего на пространстве Уотермана и удовлетворяющего условию Липшица.

Ключевые слова: функции двух переменных, Λ -вариация Уотермана, оператор суперпозиции (Немыцкого), условие Липшица.

Пусть $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ – некоторый прямоугольник (область определения функций), где $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in R^2$, такие, что $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$. Будем писать $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ для $x, y \in R^2$ и считать, что $x \leq y$, если $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$. Обозначим через R^I множество всех функций, действующих из I в R . Далее, пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ – неубывающая последовательность чисел, для которой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i^2$ расходится. Такую последовательность назовем **последовательностью Уотермана**.

Определим функцию $f(\cdot, a_2): [a_1, b_1] \rightarrow R$ по правилу: $f(\cdot, a_2)(t) = f(t, a_2), a_1 \leq t \leq b_1$. Для такой функции (**обычная**) Λ -вариация в смысле Уотермана [7, 37] на отрезке $[a_1, b_1]$ определяется правилом:

$$V_{\Lambda}(f(\cdot, a_2)) = \sup \sum_{i=1}^m \frac{|f(\beta_i, a_2) - f(\alpha_i, a_2)|}{\lambda_{\sigma(i)}},$$

где супремум берется по всем $m \in N$, всем наборам отрезков $[\alpha_i, \beta_i] \subset [a_1, b_1]$, $i = 1, \dots, m$, таким, что $a_1 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_m < \beta_m \leq b_1$ и всем перестановкам $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Аналогичным образом определяется Λ -вариация $V_\Lambda(f(a_1, \cdot))$ функции $f(a_1, \cdot)(s) = f(a_1, s)$, $a_2 \leq s \leq b_2$.

Для функции двух переменных $f \in R^I$ **двумерной Λ -вариацией в смысле Уотермана** [4, 399] на I называется выражение

$$V_{2,\Lambda}(f, I) = \sup \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{|f(\alpha_i, \gamma_j) + f(\beta_i, \delta_j) - f(\alpha_i, \delta_j) - f(\beta_i, \gamma_j)|}{\lambda_{\sigma(i)} \lambda_{\nu(j)}},$$

где супремум берется по всем парам $(m, n) \in N^2$, всем наборам отрезков $[\alpha_i, \beta_i] \subset [a_1, b_1]$, $i = 1, \dots, m$, таким, что $a_1 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_m < \beta_m \leq b_1$, всем наборам отрезков $[\gamma_j, \delta_j] \subset [a_2, b_2]$, $j = 1, \dots, n$, таким, что $a_2 \leq \gamma_1 < \delta_1 \leq \gamma_2 < \delta_2 \leq \dots \leq \gamma_n < \delta_n \leq b_2$ и всем перестановкам $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ и $\nu: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Введем понятия **полной Λ -вариации Уотермана** для функции $f \in R^I$ ([5, 205], $\lambda_i = 1$, $i \in N$) правилом

$$TV_\Lambda(f, I) = V_\Lambda(f(\cdot, a_2)) + V_\Lambda(f(a_1, \cdot)) + V_{2,\Lambda}(f, I),$$

и пространства Уотермана функций конечной полной Λ -вариации

$$\Lambda BV(I) = \{f: I \rightarrow R \mid TV_\Lambda(f, I) < \infty\}.$$

Известно [2, 104], что в случае, когда $\lambda_i = 1$ для всех $i \in N$, пространство $\Lambda BV(I) = BV(I)$ функций конечной вариации в смысле Харди – Витали – Краузе, является банаховой алгеброй. Для рассматриваемого случая λ_i , являющихся членами последовательности Уотермана, справедлив следующий результат:

Теорема 1. Множество $\Lambda BV(I)$ является банаховым пространством относительно обычных поточечных операций и нормы:

$$\|f\| = |f(a)| + TV_\Lambda(f, I), \quad f \in \Lambda BV(I). \quad (1)$$

Всюду ниже **оператором суперпозиции (типа Немыцкого)**, порожденным **генератором** $h: I \times R \rightarrow R$, называется оператор, определенный для всех $x \in I$ и $f \in R^I$ правилом:

$$(Hf)(x) \equiv H(f)(x) = h(x, f(x)). \quad (2)$$

В [3, 411] и [1, 456] получено представление липшицева оператора суперпозиции, действующего в пространствах $\Lambda BV(I)$ вещественнозначных функций одной переменной и функций одной переменной со значениями в метрических полугруппах и абстрактных выпуклых конусах соответственно. В [2, 108] описан липшицев оператор суперпозиции, действующий в пространстве $BV(I)$ Харди – Витали – Краузе функций двух переменных (случай $\lambda_i = 1$ для всех $i \in N$).

В настоящей работе представлено обобщение результатов [3] и [2] на случай пространства $\Lambda BV(I)$ функций двух вещественных переменных, а именно представлено необходимое условие на генератор оператора суперпозиции, при котором последний является липшицевым.

Для заданной функции $f \in \Lambda BV(I)$ определим ее левую регуляризацию $f^* : I \rightarrow R$ правилом [2, 109]:

$$f^*(x_1, x_2) = \begin{cases} \lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (x_1-0, x_2-0)} f(y_1, y_2), & \text{если } a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ и } a_2 \leq x_2 \leq b_2, \\ \lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (x_1-0, a_2+0)} f(y_1, y_2), & \text{если } a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ и } x_2 = a_2, \\ \lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (a_1+0, x_2-0)} f(y_1, y_2), & \text{если } x_1 = a_1 \text{ и } a_2 \leq x_2 \leq b_2, \\ \lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (a_1+0, a_2+0)} f(y_1, y_2), & \text{если } x_1 = a_1 \text{ и } x_2 = a_2. \end{cases}$$

Запись $(y_1, y_2) \rightarrow (x_1-0, x_2-0)$ следует понимать так, что $(y_1, y_2) \in I$, $y_1 < x_1$, $y_2 < x_2$ и $(y_1, y_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ в R^2 , и аналогично для остальных трех пределов.

Функцию $f : I \rightarrow R$ назовем непрерывной слева, если $\lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (x_1-0, x_2-0)} f(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ для всех $x_1 \in (a_1, b_1]$ и $x_2 \in (a_2, b_2]$, и через $\Lambda BV^*(I)$ обозначим подмножество $\Lambda BV(I)$ всех непрерывных слева на $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ функций.

Теорема 2. Если оператор H , определенный согласно (2), действует из $\Lambda BV(I)$ в себя и является липшицевым в смысле нормы (1) этого пространства, то найдутся две функции $h_0, h_1 \in \Lambda BV^*(I)$ такие, что имеет место представление [6, 155]:

$$h^*(x, u) = h_0(x) + h_1(x) \cdot u \text{ для всех } x \in I \text{ и } u \in R,$$

где $h^*(x, u)$ – левая регуляризация функции $h(x, u)$, определенная для каждого фиксированного $u \in R$.

Замечание. В общем случае функция h^* в полученном представлении не может быть заменена функцией h , что показано в [6, 157] для случая функций одной переменной и в [2, 109] для случая пространства Харди функций двух переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сольчева, О.М. Липшицевы операторы суперпозиции на метрических полугруппах и абстрактных выпуклых конусах отображений конечной Λ -вариации // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47. №3. С. 649-664.

2. Chistyakov, V.V. Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation // *Monatsh. Math.* 2002. V. 137. №2. P. 99-114.
3. Chistyakov, V.V., Solychева O.M. Lipschitzian Operators of Substitution in the Algebra ΛBV // *J. of Diff. Equations and Appl.* 2003. V. 9. №3/4. P. 407-416.
4. Dyachenko, M.I., Waterman D. Convergence of double Fourier series and W -classes // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2004. V. 357. №1. P. 397-407.
5. Hildebrandt, T.H. Introduction to the theory of integration. New York and London: Academic press, 1963. 361 p.
6. Matkowski, J., Miś J. On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the $BV[a, b]$ // *Math. Nachr.* 1984. V. 117. P. 155-159.
7. Waterman, D. On Λ -bounded variation // *Studia Math.* 1976. V. 57. №1. P. 33-45.

FUNCTIONS OF TWO VARIABLES OF FINITE Λ -VARIATION AND SUPERPOSITION OPERATORS

E. Gromov, O. Solychева, V. Tyutin

*National Research University – Higher School of Economics,
Nizhny Novgorod
25/12, Bol. Pecherskaya, Nizhny Novgorod, 603155, Russia*

Abstract. Our paper is devoted to the description of the superposition operators which map on function spaces of finite variation. We present the results which develop and generalize the recent researches by J. Matkowski, J. Mis, D. Waterman and V.V. Chistyakov: we introduce the notion of a total (two-dimensional) Λ -variation for functions of two real variables and show that the Waterman class of these functions with finite total variation is a Banach space. Also, we give the description of the Lipschitzian superposition (Nemytskii) operator mapping the Waterman class into itself.

Keywords: functions of two variables, Waterman Λ -variation, Nemytskii superposition operator, Lipschitz condition.

УДК 517.9

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА, ПОСТРОЕННОЙ ПО ПОЛУГРУППЕ ОПЕРАТОРОВ

М.Ю. Романова

*Воронежский государственный университет
394006, Воронеж, Университетская пл., 1*

Аннотация. В статье рассматривается сильно непрерывная полугруппа операторов, которая является гиперболической (или допускает экспоненциальную дихотомию). Для исследуемой полугруппы операторов строится функция Грина, которая играет важную роль в представлении слабых ограниченных решений дифференциальных