УДК 530.12:531.18+378.147

ПОНЯТИЕ СОБСТВЕННОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

И.В. Гордеев, А.Н. Малинин

Липецкий государственный педагогический университет
398020, Липецк, ул. Ленина, 42

Аннотация. В статье вводится понятие собственной релятивистской кинетической энергии. Показана его фундаментальная значимость в кинематике ядерных реакций и процессов столкновений элементарных частиц. Методически обоснована необходимость введения этого понятия при изложении основ теории относительности в курсах теоретической физики классических и педагогических университетов.

Ключевые слова: собственная кинетическая энергия, релятивистская механика, мировой постулат Минковского, ядерные реакции, процессы столкновений элементарных частиц.

В ядерных реакциях и процессах столкновения элементарных частиц, как будет показано ниже, фундаментальную значимость играет понятие собственной релятивистской кинетической энергии системы частиц. Однако в вузовских учебниках физики и в монографиях по теории относительности это понятие не вводится (см., например, [1-3] и др.; в качестве исключения можно назвать школьный учебник [4] для классов с углубленным изучением физики), что безусловно затрудняет понимание с энергетической точки зрения процессов столкновений элементарных частиц, составляющих содержание одного из разделов современной экспериментальной и теоретической физики.

Данная статья восполняет названный пробел. Ее методический материал может быть непосредственно использован в преподавании основ релятивистской механики студентам классических и педагогических университетов.

Изложение вопроса предлагается начать с определения собственной кинетической энергии совокупности частиц в классической механике. Ограничимся для простоты случаем совокупности двух частиц массами m_1, m_2. Пусть в лабораторной системе отсчета они движутся со скоростями соответственно $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$. Их суммарная кинетическая энергия в этой системе отсчета : $T = \left(m_1\vec{\upsilon}_1^2 + m_2\vec{\upsilon}_2^2\right)/2$, а импульс $\vec{p} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$. Перейдем в систему отсчета центра масс данной совокупности частиц. По определению в такой системе отсчета их суммарный импульс: $\vec{p}' = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2' = 0$. Если $\vec{\upsilon}_c$ – скорость центра масс совокупности частиц, то по классическому закону сложения скоростей: $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}_1'$, $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}_2'$. Тогда суммарная кинетическая энергия совокупности частиц в системе отсчета центра масс:

$$T' = \left(m_1\vec{\upsilon}_1'^2 + m_2\vec{\upsilon}_2'^2\right)/2 = \left[m_1\left(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_c\right)^2 + m_2\left(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_c\right)^2\right]/2 \ .$$

Принимая во внимание равенство: $(m_1 + m_2)\vec{\upsilon}_c = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$, получим:

$$T' \equiv T_0^{кл.} = \frac{\mu\upsilon_{отн.}^2}{2} \ , \qquad (1)$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса совокупности двух частиц, $\vec{\upsilon}_{отн.} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2$ – их относительная скорость.

Суммарную кинетическую энергию совокупности двух частиц в системе отсчета центра масс, выражаемую формулой (1), назовем *классической собственной кинетической энергией совокупности двух частиц.*

Обратим внимание на то, что величина $T_0^{кл.} = inv$, т. е. ее значение не зависит от выбора системы отсчета. Кроме того, она имеет смысл только для совокупности двух и более частиц (для одной частицы $T_0^{кл.} \equiv 0$). Величина $T_0^{кл.} < T$, т. к. согласно классической теоремы Кёнига: $T = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}_c^2 / 2 + T_0$, в чем можно убедиться непосредственно.

Рассмотрим неупругое столкновение двух частиц, в результате которого образуется одна частица массой $M = m_1 + m_2$, движущаяся со скоростью $\vec{\upsilon}_c$. До столкновения кинетическая энергия совокупности частиц $T_1 = T$, а после столкновения $T_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}_c^2 / 2$. Разность $\Delta T = T_2 - T_1 = -T_0^{кл.}$, причем вначале $T_0^{кл.}(\text{начальн.}) = \mu\vec{\upsilon}_{отн.}^2 / 2$, а в итоге $T_0^{кл.}(\text{конечн.}) \equiv 0$. Куда же пропала собственная кинетическая энергия начальной совокупности частиц? Очевидно, что она перешла во внутреннюю энергию вновь образовавшейся частицы массой $M = m_1 + m_2$.

В качестве примера можно назвать лобовое столкновение двух автомобилей. Именно собственная кинетическая энергия, определяемая формулой (1) – источник их деформации и разрушения.

Заметим также, что при упругом столкновении частиц их собственная кинетическая энергия сохраняется.

Понятие собственной кинетической энергии совокупности частиц можно определить и в релятивистской схеме Эйнштейна. Однако последняя формально носит квазиклассический характер и связана с условным определением координатной одновременности [5]. Следуя тому, что специальная теория относительности есть теория, в сущностной основе которой лежит мировой постулат Минковского и соответственно пространство-время Минковского с псевдоевклидовой геометрией [6], введем понятие собственной кинетической энергии совокупности частиц в рамках релятивистской схемы Минковского, опираясь на понятие псевдоевклидова вектора – объекта, не зависящего от выбора системы координат и, следовательно, от определения координатной одновременности. При этом предлагаемый здесь методический подход будет несколько отличаться от того, как понятие собственной кинетической энергии совокупности частиц было введено А.Н. Малининым [7].

В мире Минковского совокупность двух свободных частиц представляется двумя прямыми мировыми линиями. Псевдоевклидовы векторы импульса частицы: $\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1$,

$\vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2$, где $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ – псевдоевклидовы векторы скоростей, причем $\vec{V}_1^{\,2} = \vec{V}_2^{\,2} = 1$ (здесь релятивистская постоянная $c \equiv 1$). Поэтому $\vec{P}_1^{\,2} = m_1^2$, $\vec{P}_2^{\,2} = m_2^2$.

По определению *собственной релятивистской кинетической энергией* совокупности двух свободных частиц назовем величину

$$T_0 \equiv \sqrt{\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)^2} - \left(\sqrt{\vec{P}_1^{\,2}} + \sqrt{\vec{P}_2^{\,2}}\right). \tag{2}$$

Сразу заметим, что конструкция (2) означает, что T_0 – инвариантная величина. Она не зависит ни от выбора пространственно-временной сетки в заданной инерциальной системе отсчета, ни от выбора самой инерциальной системы отсчета. Таким образом, T_0 – объективная энергетическая характеристика совокупности свободных частиц.

Поскольку $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}$ – псевдоевклидов вектор импульса совокупности двух свободных частиц как целого и $\vec{P}^{\,2} = M^2$, где M – масса этого целого или, иначе, эквивалентной исходной совокупности двух свободных частиц некой «суперчастицы», то формула (2) может быть записана так:

$$T_0 = M - \left(m_1 + m_2\right), \tag{3}$$

т. е. собственная релятивистская кинетическая энергия совокупности двух свободных частиц выражается разностью между массой M эквивалентной «суперчастицы» и суммарной массой $\left(m_1 + m_2\right)$ частиц.

Сравнивая формулы (2), (3) с выражением (1) величины $T_0^{кл}$ и учитывая, что в классической механике $M = m_1 + m_2$, обратим внимание на то, что понятия о величинах T_0 и $T_0^{кл.}$ существенно различны и никакого соответствия между ними нет, вопреки распространенному в литературе по теории относительности ошибочному утверждению, что при малых скоростях релятивистская механика будто бы переходит в классическую механику. Да, определенное соответствие отдельных соотношений релятивистской механики в неадекватной квазиклассической форме и соотношений классической механики можно установить. Но концептуального соответстсвия между ними, как справедливо замечает Т. Кун [8, с. 139-140], нет и быть не может, тем более, если иметь в виду адекватную форму выражения релятивистской механики на языке понятий пространства-времени Минковского.

Формула (2) непосредственным образом обобщается на случай совокупности n свободных частиц:

$$T_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i\right)^2} - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\vec{P}_i^{\,2}}, \tag{4}$$

что иначе выражается простым равенством

$$T_0 = M - \sum_{i=1}^{n} m_i \ . \tag{5}$$

Величина T_0 в релятивистской механике, как и величина $T_0^{кл}$ в классической механике, имеет смысл только для совокупности двух и более частиц. В случае одной частицы $T_0 \equiv 0$. Вместе с тем возможно (как и для $T_0^{кл.}$) $T_0 = 0$ для совокупности свободных частиц (масса такой совокупности $M = \sum m_i$). Тогда из выражения (4) следует:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i^{\,2} + 2\sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{\vec{P}_i^{\,2}}\sqrt{\vec{P}_j^{\,2}} \ , \ i \neq j \ . \tag{6}$$

Из равенства (6), поскольку $\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i^{\,2} + 2\sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{\vec{P}_i^{\,2}}\sqrt{\vec{P}_j^{\,2}}\,\mathrm{ch}\varphi_{ij}$, получим $\varphi_{ij} = 0$, т. е. прямые мировые линии частиц параллельны. Иными словами, относительные быстроты всех пар частиц равны нулю.

Формула (4) применима и к совокупности безмассовых частиц – фотонов (их линии в пространстве-времени прямые, имеют нулевую длину и называются изотропными). В таком случае $\vec{P}_i^{*2} = 0$ (где $\vec{P}_i^{*}$ – псевдоевклидов импульс *i*-го фотона совокупности), и собственная кинетическая энергия совокупности фотонов выражается формулой:

$$T_0^{*} = \sqrt{2\sum_{i,j=1}^{n} \vec{P}_i^{*}\vec{P}_j^{*}} \ . \tag{7}$$

Отсюда следует, что $T_0^{*} = 0$, если все пары скалярных произведений $\vec{P}_i^{*}\vec{P}_j^{*} = 0$. Это имеет место только в случае, когда изотропные прямые совокупности фотонов не пересекаются друг с другом, т. е. параллельны.

В релятивистской механике, так же как и в классической, имеет место теорема Кёнига в форме:

$$T = T_0 + T_c \ , \tag{8}$$

где T – суммарная кинетическая энергия совокупности частиц в системе отсчета лабораторного наблюдателя с псевдоевклидовым вектором скорости $\vec{U}$:

$$T = \vec{U} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\vec{P}_i^{\,2}} \ , \tag{9}$$

T_0 – собственная релятивистская кинетическая энергия совокупности частиц, определяемая формулой (4), T_c – кинетическая энергия центра масс совокупности частиц:

$$T_c = \vec{U} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i - M \quad . \tag{10}$$

Рассмотрим ядерную реакцию типа:

$$X + Y \to A + B \quad , \tag{11}$$

где X, Y – ядра, вступившие в реакцию (столкновение ядер); A, B – ядра, образовавшиеся после реакции.

По определению энергетический выход ядерной реакции (или, кратко, ее энергия):

$$Q = \Delta T \quad , \tag{12}$$

где ΔT – разность суммарных лабораторных кинетических энергий совокупностей конечных и начальных ядер реакции, т. е. в случае (11): $\Delta T = \left(T_A + T_B\right) - \left(T_X + T_Y\right)$.

Так как в процессе ядерной реакции $\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = const$ (закон сохранения релятивистского импульса замкнутой совокупности частиц, в рассматриваемом случае – ядер), то очевидно, что $T_c = const$, и тогда согласно теореме Кёнига (8):

$$\Delta T = \Delta T_0 \quad . \tag{13}$$

Поэтому

$$Q = \Delta T_0 \quad , \tag{14}$$

т. е. энергия ядерной реакции определяется разностью собственных кинетических энергий совокупностей конечных и начальных ядер.

Учитывая теперь равенство (5), находим: $\Delta T_0 = -\Delta\left(\sum m_i\right)$ и, таким образом, получим выражение:

$$Q = -\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \quad , \tag{15}$$

согласно которому энергия ядерной реакции может быть найдена посредством вычисления разности суммарных масс начальных и конечных продуктов реакции.

Учтем, что согласно фундаментальному релятивистскому закону взаимосвязи массы и энергии масса ядра выражается равенством:

$$m_i = \left(\sum m_k^*\right)_i + W_i \quad , \tag{16}$$

где $\sum m_k^*$ – суммарная масса частиц (нуклонов – протонов и нейтронов), составляющих ядро; W_i – энергия связи ядра ($W_i < 0$).

Поскольку в процессе ядерной реакции имеет место закон сохранения числа нуклонов, то из соотношений (15), (16) следует:

$$Q = -\Delta W \ , \tag{17}$$

где ΔW – разность суммарных энергий связи конечных и начальных ядер реакции.

Из равенств (14), (17) следует $\Delta T_0 = -\Delta W$, т. е. $\Delta\left(T_0 + W\right) = 0$. Таким образом, получим следующий *релятивистский закон сохранения для ядерных реакций*:

$$T_0 + W = const \ , \tag{18}$$

означающий, что *собственная кинетическая энергия вместе с суммарной энергией связи совокупности ядер представляет собой величину, сохраняющуюся при ядерных реакциях*.

Именно закон (18) позволяет определить по энергиям связи заданных исходных ядер собственную кинетическую энергию их совокупности, необходимую для осуществления реакции этих ядер.

Пусть задана совокупность двух свободных элементарных частиц *a*, *b* массами $m_a = \sqrt{\vec{P}_a^{\,2}}$, $m_b = \sqrt{\vec{P}_b^{\,2}}$, где $\vec{P}_a$, $\vec{P}_b$ псевдоевклидовы импульсы частиц. Согласно определению (4) собственная кинетическая энергия этой совокупности частиц:

$$T_0 = \sqrt{\left(\vec{P}_a + \vec{P}_b\right)^2} - \left(\sqrt{\vec{P}_a^{\,2}} + \sqrt{\vec{P}_b^{\,2}}\right) . \tag{19}$$

Допустим, что частица b в системе отсчета лабораторного наблюдателя покоится, а частица *a*, движется в направлении к частице *b*. В результате их кратковременного столкновения образуются новые элементарные частицы α, β массами $m_\alpha = \sqrt{\vec{P}_\alpha^{\,2}}$, $m_\beta = \sqrt{\vec{P}_\beta^{\,2}}$. Ставится задача: определить пороговую кинетическую энергию реакции $a + b \to \alpha + \beta$, т. е. минимальную кинетическую энергию частицы-снаряда a в системе отсчета лабораторного наблюдателя, при которой данная реакция оказывается возможной.

Порог рассматриваемой реакции определяется тем, что собственная кинетическая энергия совокупности образовавшихся частиц равна нулю:

$$T_0' = \sqrt{\left(\vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta\right)^2} - \left(\sqrt{\vec{P}_\alpha^{\,2}} + \sqrt{\vec{P}_\beta^{\,2}}\right) = 0 \ . \tag{20}$$

Учитывая в равенстве (20) закон сохранения псевдоевклидова импульса $\vec{P}_a + \vec{P}_b = \vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta$, имеем соотношение

$$\left(\vec{P}_a + \vec{P}_b\right)^2 = \left(m_a + m_\beta\right)^2 \ . \tag{21}$$

Отсюда следует равенство:

$$\left(m_a + m_b\right)^2 + 2m_a m_b\left(\mathrm{ch}\varphi - 1\right) = \left(m_a + m_\beta\right)^2 \ , \tag{22}$$

где $\mathrm{ch}\varphi = \left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)/2$ – гиперболический косинус, $i\varphi$ – угол между псевдоевклидовыми векторами $\vec{P}_a$, $\vec{P}_b$, а φ – быстрота частицы *a* относительно частицы *b*.

Кинетическая энергия частицы *a* в системе отсчета лабораторного наблюдателя определяется выражением:

$$T_a = \vec{U} \cdot \vec{P}_a - \sqrt{\vec{P}_a^{\,2}} \ , \tag{23}$$

где $\vec{U} = \left(1,\ 0\right)$ – псевдоевклидов вектор скорости лабораторного наблюдателя.

Так как $\vec{U} \cdot \vec{P}_a = m_a \mathrm{ch}\varphi$, $\sqrt{\vec{P}_a^{\,2}} = m_a$, то

$$T_a = m_a\left(\mathrm{ch}\varphi - 1\right) \ . \tag{24}$$

Тогда из равенства (22) следует искомая величина:

$$T_a^{порог} = \frac{\left(m_\alpha + m_\beta\right)^2 - \left(m_a + m_b\right)^2}{2m_b} \ . \tag{25}$$

В заключение резюмируем следующее. Собственная релятивистская кинетическая энергия представляет собой фундаментальную величину – инвариантную энергетическую характеристику заданной совокупности частиц любой природы. Именно поэтому, как показано выше, она столь физически значима в ядерных процессах и в явлениях столкновений элементарных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев, А.Н.* Механика и теория относительности [Текст] / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1976. – 416 с.
2. *Бондарев, Б.В*. Курс общей физики: в 3 кн. Кн. 1. Механика [Текст] / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. – М.: Высшая школа, 2003. – 352 с.
3. *Мёллер*, К. Теория относительности [Текст] / К. Мёллер. – М.: Атомиздат, 1975. – 400 с.

4. Физика: Учеб. для 11 кл. с углубл. изучением физики [Текст] / А.Т. Глазунов, О.Ф. Кабардин, А.Н. Малинин и др.; Под ред. А.А. Пинского, О.Ф. Кабардина. – М.: Просвещение, 2005. – 448 с.
5. *Эйнштейн, А*. Собрание научных трудов: в 4 томах [Текст] / А. Эйнштейн. М.: Наука, 1965. – 700 с.
6. *Логунов, А.А*. Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы [Текст] / А.А. Логунов. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
7. *Малинин, А.Н*. Методические вопросы теории относительности [Текст] / А.Н. Малинин. – Липецк: Изд-во ЛГПИ, 2000. – 267 с.
8. *Кун, Т*. Структура научных революций [Текст] / Т. Кун. – М.: Прогресс, 1977. – 300с.

CONCEPT OF INTRINSIC KINETIC ENERGY SYSTEM OF PARTICLES IN RELATIVISTIC MECHANICS

I. Gordeyev, A. Malinin

Lipetsk State Pedagogical University
398020, Lipetsk, Lenina, 42

Abstract. The article introduces the concept of intrinsic relativistic kinetic energy. Its fundamental significance in kinetics of nuclear reaction and the process of elementary particles collisions were shown. The necessity of introduction of this concept in teaching the basics of the theory of relativity in theoretical physics courses in both classical and pedagogical universities was methodically substantiated.

Key words: inherent kinetic energy, relativistic mechanics, Minkovski's world postulate, nuclear reaction, collision process of elementary particles.

УДК 37.016:51

ЗАДАЧА О ПОГОНЕ

М.В.Самоявчева, Л.И. Федоров

Государственный университет управления
109542, Москва, Рязанский пр., 99