18. *Нестеренко, Е.Л.* Редуктивные проабелевы пространства [Текст]. //Актуальные проблемы математики и методики преподавания. - Пензенский университет. - 2001. - С. 76-78.
19. *Нестеренко, Е.Л.* Свойства просимметрических пространств [Текст]. //Тезисы научных докладов Международной научно-практической конференции «Народное образование в XXI веке», посвященной 70-летию МПУ. - М.: Изд-во МПУ «Народный учитель». - 2001. - С. 43.

## ALGEBRAIC PROPERTIES OF SOME CLASSES OF THE AFFINELY CONNECTED MANIFOLDS, CLOSE TO THE SYMMETRIC

**O. Matveyev*, H. Nesterenko****

**Moscow region state university*
*10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

***Peoples' Friendship University of Russia (PFUR)*
*6, Miklucho-Maklaya str., 117198, Moscow*

*Abstract.* We consider algebraic properties of prosymmetric, almost symmetric and antisymmetric of affinely connected manifolds, close to symmetric spaces.

*Key words*: quasigroup, geodesic loop, affine connection, the symmetric space.

УДК 514.7

# СИММЕТРИИ ПОЛИПОЛЯРНОЙ КООРДИНАЦИИ

**Т.А. Ракчеева**

*Институт машиноведения РАН (Москва)*
*117334, Москва, ул. Бардина, 4*

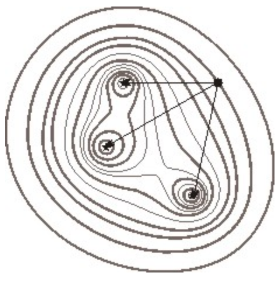
*Аннотация.* Вводится полиполярная система координат, формируемая семейством многофокусных лемнискат, полный набор фокусов которой образует ее структурное начало. Произвольная точка плоскости имеет, как и в классической полярной системе координат, полиполярные координаты: метрическую $\rho$, и угловую $\varphi$, являющиеся функциями полярных координат относительно каждого из фокусов. Фокусное представление формы кривой многофокусными лемнискатами позволяет настроить полиполярную систему координат таким образом, чтобы метрическая компонента соответствовала форме заданной кривой. Лемниската и ее фокусная структура имеют одну и ту же группу симметрий. Рассмотрены симметрии полиполярной координации, а также криволинейные симметрии на многофокусных лемнискатах.
*Ключевые слова*: криволинейная система координат, симметрии, кривые, фокусы, лемнискаты, степени свободы, аппроксимация.

**Введение.** Наиболее простая из криволинейных СК – классическая полярная - характеризует точку относительно единого центра двумя координатами: полярным радиусом ρ и полярным углом φ, где ρ - евклидово расстояние от точки до полюса, а φ - угловая мера относительно полярной оси. В работе [3, 251] автором предложена новая криволинейная СК - полиполярная лемнискатическая система координат (ППЛ), которая так же, как и классическая полярная СК, характеризует точку плоскости двумя координатами: полиполярным радиусом ρ и полиполярным углом φ, но имеет не один центр-полюс, а несколько (конечное число) полюсов. Такое координирование обеспечивается семействами *многофокусных лемнискат*.

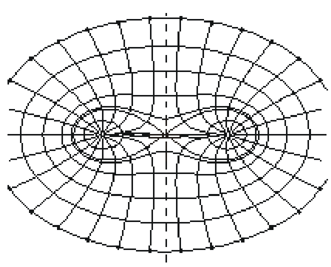
В данной работе обсуждаются вопросы полиполярной координации плоскости и ее симметрийных свойств.

**Часть I. Полиполярная координация**

**Многофокусные лемнискаты.** Многофокусные лемнискаты (овалы Кассини) на плоскости - гладкие замкнутые фокусные кривые (рис. 1*а*) без самопересечений, возможно многосвязные, содержащие внутри себя конечное число фокусов [1, 2, 3, 7].



*а*)



*б*)

Рис. 1. ЛСК: *а*) семейство 3*f*-лемнискат; *б*) 2*f*-ППЛ.

Лемниската определяется своим инвариантом через $k$ точек-фокусов и числовой параметр $R$ как геометрическое место точек, для которого сохраняется постоянным, равным $R^k$, произведение расстояний $r_j$ до всех $k$ фокусов:

$$\prod_{j=1}^{k} r_j = R^k \quad . \tag{1}$$

Для фиксированного набора $k$ фокусов лемнискаты с разными радиусами образуют семейство вложенных кривых ($R$-форм) от $k$-связных, для малых значений радиуса $R$, до односвязных, для больших значений, причем кривые с большим радиусом охватывают кривые с меньшим радиусом без пересечений (рис. 1*а*).

**Полиполярная система координат**. Семейство многофокусных лемнискат позволяет построить обобщение классического полярного представления в виде полиполярной плоскости.

Набор $k$ фокусов координируется в абсолютной декартовой системе отсчета (АСО): $f_j = \{a_j, b_j\}$, $j = 1, \ldots, k$, образуя фокусную структуру $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, которую будем в дальнейшем называть $kf$-структурой, а соответствующие лемнискаты – $kf$-

лемнискатами.

*Kf-структура является структурным (полиполярным) началом координат ППЛ.*

Произвольная точка плоскости с АСО-координатами ($x$, $y$) в полиполярной лемнискатической системе координат (ЛСК) имеет полиполярные координаты (ρ, φ), где ρ - метрическая, а φ - угловая координата, которые являются, соответственно, функциями фокусных $\rho_j$ и $\varphi_j$ полярных координат относительно каждого из фокусов $f_j$.

**Метрическая координата ρ**. Метрическая координата полиполярной СК определена как среднегеометрическое:

$$\rho = \sqrt[k]{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k}\,,$$

фокусных полярных радиусов $\rho_j \equiv r_j$, равных в евклидовой метрике:

$$\rho_j \equiv r_j = \sqrt{(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2}.$$

*Метрическая координата ρ, существуя для любой точки (x, y), может рассматриваться как определение ее расстояния до kf-структуры*: для любой *kf*-структуры координата ρ положительна всюду, кроме структурного начала координат, где она обращается в ноль, непрерывно, монотонно и неограниченно растет с удалением от фокусной структуры (вдоль любого φ = const) - диапазон значений ρ от 0 до ∞ [3].

*Kf-лемниската ρ = const ≡ $R^k$, удовлетворяя условию постоянства расстояния до kf-структуры, может рассматриваться на плоскости как полиполярная окружность - многофокусный аналог полярной координатной окружности.* В отличие от классической окружности, которая является монополярной, *kf*-лемнискату будем называть *полиполярной окружностью*, имея в виду, в качестве дополнительного обоснования, тот факт, что любая лемниската «окружает» все свои фокусы.

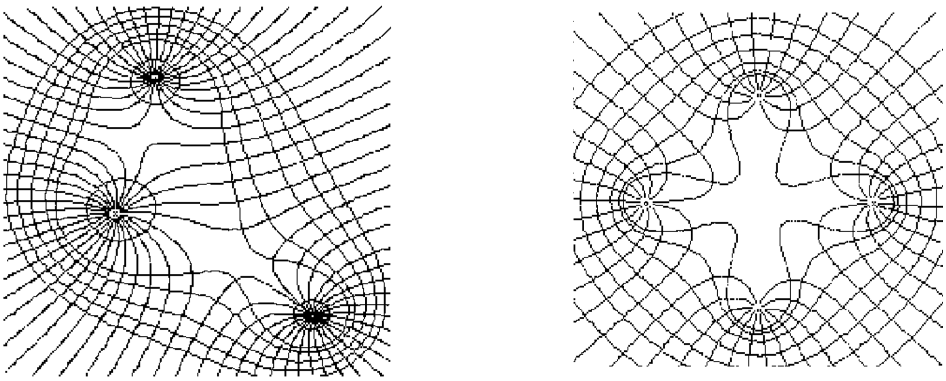
**Угловая координата φ.** Угловая координата полиполярной лемнискатической СК введена как среднее арифметическое фокусных полярных углов $\varphi_j$, каждый из которых есть классический полярный угол относительно *j*-го полюса-фокуса:

$$\varphi_j = arctg\frac{y - b_j}{x + a_j}\,.$$

*Ориентационная координата φ для произвольной точки плоскости может рассматриваться как определение ее направления на kf-структуру*: для любой *kf*- структуры координата φ существует всюду, кроме структурного начала координат, где она не определена, положительна и монотонно возрастает при обходе фокусной структуры в положительном направлении по изометрической кривой ρ = *const* с периодической замкнутостью в диапазоне значений от 0 до 2π [3].

**Семейства изопараметрических кривых.** Доказано, что *семейство изопараметрических кривых угловой координаты* φ = const *есть семейство градиентных кривых к семейству лемнискат* ρ = const, и, как следствия: на градиентных к лемнискатам кривых неизменной *сохраняется сумма полярных* углов: $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k$, а сопряженные семейства изопараметрических кривых ρ = const и φ = const являются *взаимно ортого-*

*нальными* в каждой точке. На рис. 1*б* и рис. 2*а*, *б* приведены координатные сетки сопряженных изометрических семейств кривых: ρ = const (замкнутые кривые, охватывающие фокусы) и φ = const (разомкнутые кривые, идущие от фокусов) для полиполярных систем координат с разным числом полюсов и конфигураций.



*а*) *б*)

Рис. 2. Полиполярные ППЛ СК: *а*) 3*f*-асимметричная, *б*) 4*f*-симметричная

Приведенные рисунки иллюстрируют форму и характер взаиморасположения сопряженных семейств лемнискат и градиентных к ним кривых, в частности, их взаимную ортогональность и форму сепаратрис как для симметричной, так и для не симметричной *kf*-структуры. Рис. 1*б* представляет симметричную 2*f*-СК - простейшую из полиполярных (среди ее лемнискат есть кривая в виде «восьмерки», называемая лемнискатой Бернулли). Несимметричный случай произвольной трехфокусной системы представляет рис. 2*а*, а рис. 2*б* – случай четырехфокусной системы с полной симметрией.

**Предельный переход к классической СК.** Объектами полиполярной СК, таким образом, являются: *kf*-структура в качестве начала и сопряженные семейства лемнискат ρ = const и градиентных кривых φ = const.

При неограниченном и непрерывном сближении всех *k* фокусов в одну точку *kf*-структура в пределе переходит в единый центр-фокус, семейство *kf*-лемнискат – в семейство окружностей с этим центром, а семейство градиентных кривых – в семейство градиентных к окружностям радиальных прямых, проходящих через фокусный центр. Таким образом, *при вырождении полиполярной kf-структуры в монополярную объекты полиполярной СК непрерывно трансформируются в объекты классической полярной СК.*

Иллюстрацией предельного перехода может частично служить 2*f*-ППЛ на рис. 1*в* для удаленных от фокусной структуры лемнискат.

Асимптотические переходы полиполярной координации в монополярную имеют место также в периферийных областях плоскости, достаточно удаленных от *kf*-структуры, что соответствует большим значениям ρ (радиуса софокусных координатных лемнискат).

Градиентные кривые $\varphi$ = *const* произвольной *kf*-структуры, исходящие каждая из своего фокуса, при $\rho \to \infty$ асимптотически приближаются к прямым $y = Cx$ 1*f*-структуры, проходящим через общий предельный центр *kf*-структуры.

**Анализ полиполярной координации.** Полиполярная ЛСК имеет особенности координации. Главная особенность заключена в самой фокусной структуре. В классической полярной СК особой точкой является единственный полюс, где $\rho = 0$, а угловая координата $\varphi$ не определена. В предлагаемой полиполярной СК - это $k$ полюсов фокусной структуры, где обращается в ноль полиполярный радиус $\rho \equiv R = 0$, а угловая координата $\varphi$ не имеет определенного значения.

Таким образом, *структурное начало полиполярной СК характеризуется нулевым значением метрической координаты $\rho$ и неопределенным значением угловой координаты $\varphi$, как и в классической СК.*

Другие особенности ППЛ-координации, связанные с разрывностью лемнискат, имеющей место для любой *kf*-структуры в критическом диапазоне $0 < \rho < \rho_0$, где $\rho_0$ – значение радиуса, начиная с которого лемниската приобретает односвязную форму. В частности, эффект нарушения однозначности в кратных точках является естественным следствием присущей любой полярной СК периодичности угловой координаты $\varphi$ - в классической полярной СК $\varphi$ имеет, как известно, значения с точностью до $2\pi n$. Вопросы *взаимной однозначности*, *непрерывности* и *монотонности* предлагаемой системы координации рассмотрены в [3] и доказаны для общего случая *kf*-структуры и всего диапазона $R$-форм лемнискат.

Одним из наиболее важных вопросов для *kf*-структуры произвольной конфигурации является вопрос об объединении несвязных петель многосвязной лемнискаты в единую замкнутую координатную линию $\rho$ = const, вдоль которой монотонно меняются значения угловой координаты $\varphi$ в диапазоне от 0 до $2\pi$, т.е. организация единой $\varphi$-параметризации на многосвязной лемнискате. Обход многосвязной формы сопряжен с переходом с одной петли на другую, при этом порядок обхода, соответствующий $\varphi$-параметризации, может дополнительно фрагментировать ее, нарушая топологическую связность петель. Ответ на поставленный вопрос о возможности требуемой $\varphi$-параметризации для любой многосвязной метрической изолинии $\rho$ = const произвольной *kf*-ЛСК и способе организации соответствующего обхода несвязных форм положительный (конструктивное доказательство приведенное в [3]): *замкнутый и однократный обход многосвязных лемнискат с непрерывной и монотонной $\varphi$-параметризацией в диапазоне $[0, 2\pi]$ существует и однозначен. Структура фрагментации и переходов на всем множестве многосвязных лемнискат идентифицируется семейством сепаратрис, разделяющих бассейны фокусов.*

В таким образом устроенной ППЛ могут быть рассмотрены разные объекты и построения как классической, так и современной математики, к каковым относятся симметрийные свойства и построения. Особенность состоит в том, что симметрийные характеристики полиполярной плоскости и математических объектов в ней создают новые композиционные возможности и свойства.

*Цель настоящей работы – анализ симметрий полиполярной лемнискатической системы координат с k-фокусной структурой.*

**Часть II. Симметрии полиполярной координации**

**Симметрии фокусов и лемнискат.** Сохраняя в сжатом виде информацию о форме представляемой кривой, фокусная структура наследует и симметрии ее формы, в отличие, например, от системы степеней свободы гармонического представления. С другой стороны, лемниската, однозначно определяясь фокусной структурой, содержит в своей форме фокусные симметрии [4].

Группа симметрий лемнискаты Бернулли состоит, как известно, из зеркальных отражений относительно двух ортогональных осей, что эквивалентно центральной симметрии. Такой же группой симметрий обладает и ее фокусная структура, состоящая из двух фокусов (2*f*-структура всегда симметрична и обладает постоянной группой симметрий, отражение от одной из осей вырожденное). Фокусная структура, состоящая из трех и более фокусов, может быть как симметричной, так и несимметричной и в зависимости от конфигурации может иметь разную группу симметрий. На рис.2*а* представлено, как отмечалось выше, семейство лемнискат со структурой фокусов несимметричной формы, а на рис.2*б*, напротив, фокусная структура имеет правильную 4*f*-форму - фокусы расположены в вершинах квадрата - и обладает всеми симметриями квадрата. Той же группой симметрий обладают и соответствующие лемнискаты. Обобщая, можно сформулировать утверждение: *Лемниската и ее фокусная структура имеют одну и ту же группу симметрий.*

В основе этого утверждения лежит порождающий инвариант (1) а также то обстоятельство, что и фокусная структура, и соответствующая ей лемниската имеют представление в одной и той же системе координат, а, значит, выдерживают преобразования, сохраняющие форму. Порождающий инвариант, как следует из (1), представляет собой мультипликативную композицию расстояний между точками, что ограничивает данное исследование рассмотрением преобразований метрического пространства, сохраняющих расстояния и форму. Такие преобразования, являющиеся, как известно, ортогональными, образуют группу подобия, которая порождает группу симметрий, включающую переносные, масштабные, поворотные симметрии и отражения. Порождающий инвариант (1) может быть расширен рассмотрением не только евклидовых расстояний [6, 113], что ставит ряд новых интересных задач, но в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением указанных преобразований и симметрий.

Доказательство сформулированного утверждения распадается на две части.

Для доказательства прямого утверждения можно предположить наличие у фокусной структуры некоторой группы плоских симметрий, содержащей перенос, отражение, поворот или растяжение, и вычислить инвариантный функционал радиуса (1) для произвольной точки $(x, y)$ и симметричной ей точки $(x', y')$. Полученное равенство радиусов $R^k = R'^k$ для симметричных точек, в силу однозначности соответствия радиуса определенной лемнискате, будет свидетельствовать о наличии у лемнискаты данной группы симметрий. Так, *kf*-структура с переносной симметрией даст лемнискату с такой же переносной симметрией, а с масштабной симметрией – лемнискату с другим радиусом, соответствующим масштабному коэффициенту преобразований фокусов. Следствием $\alpha$-поворотной симметрии *kf*-структуры будет лемниската с $\alpha$-поворотной симметрией, - точки $(x, y)$ и $(x', y')$, связанные соответствующим преобразованием, будут иметь одно и то же расстояние до фокусной структуры с точностью до порядка входящих в функционал $k$ фокусных расстояний $r_j$.

Доказательство обратного утверждения об отсутствии у лемнискаты иных симметрий выполняется аналогично. Предположив наличие у лемнискаты какой-либо из указанных симметрий формы, выражаемой в равенстве соответствующих инвариантных функционалов $R^k = R'^k$ для симметричных точек $(x, y)$ и $(x', y')$, из уравнения $R^k = R'^k$ с необходимостью получаем соотношение для координат фокусов, соответствующее данной симметрии у фокусной структуры. Такое доказательство не составляет принципиальных трудностей для каждой конкретной группы симметрий, но представляет технические трудности для общего случая. В связи с этим, более целесообразным представляется другое доказательство.

Рассмотрим произвольную *kf*-лемнискату $L_s$, порождаемую структурой $k$ фокусов. Любая фокусная структура является предельной формой софокусного семейства лемнискат при стремлении радиуса ρ к нулю. Значит, в связи с выше изложенным (часть I), для любого, сколь угодно малого ε лемниската $L_\varepsilon$ в ε-окрестности фокусов данной *kf*-структуры имеет ту же φ-параметризацию, что и любая другая софокусная лемниската, в том числе и рассматриваемая лемниската $L_s$. Поворотная симметрия для произвольной пары симметричных точек $(x, y)$ и $(x', y')$ на $L_s$ имеет соответствующую симметрию φ-параметризации на ней и на лемнискате $L_\varepsilon$ в ε-окрестности ее *kf*-структуры. При устремлении ε к нулю получим $k$ точек фокусной структуры.

Таким образом, *φ-параметризация устанавливает соответствие симметрий произвольной kf-лемнискаты и ее фокусной структуры.*

**Симметрии полиполярной плоскости.** Фокусную группу симметрий наследует и каждая лемниската в отдельности, и все семейство в целом. Симметрии *kf*-структуры порождают те же симметрии всей полиполярной системы координат, состоящей из семейства софокусных лемнискат и сопряженного семейства градиентных кривых.

Таким образом, *группу симметрий полиполярной плоскости определяет группа симметрий фокусной структуры – структурного начала системы координат.*

Полиполярная лемниската в *kf*-ЛСК, как указывалось выше, играет такую же роль, что и окружность в классической полярной СК. На полиполярной плоскости относительно *единичной kf*-лемнискаты реализуются классические симметрийные конструкции: отражения, поворотные и др.

Для построения симметрий на полиполярной плоскости расчеты всех преобразований выполняются в полиполярных координатах (ρ, φ), являющихся по определению функциями однополярных координат $(\rho_j, \varphi_j)$, $j = 1, \ldots, k$. Рис. 3 иллюстрирует подобные симметрийные построения для единичной полиполярной окружности, представленной 2*f*-структурной лемнискатой.

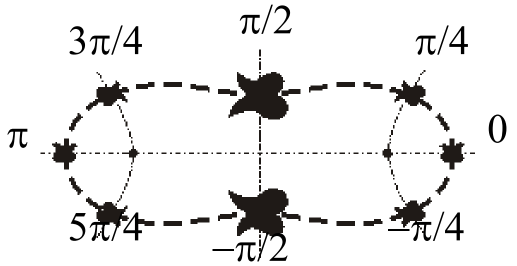
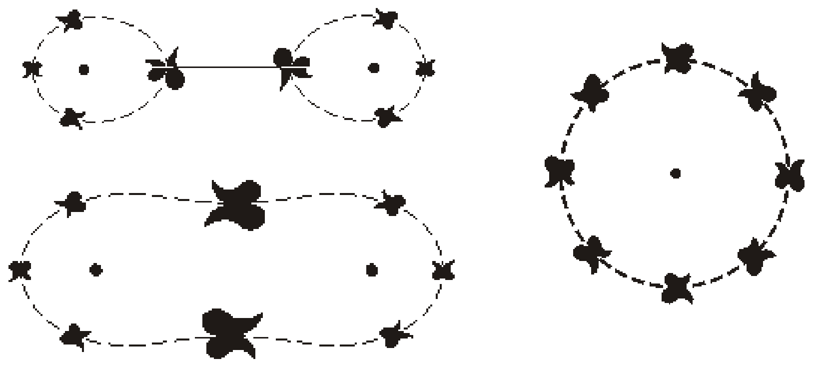



Рис. 3 Симметрии произвольного несимметричного мотива на 2*f*-лемнискате

Этот рисунок представляет, во-первых, иллюстрацию *симметрии отражения* от единичной полиполярной 2*f*-окружности - геометрические объекты произвольного несимметричного мотива внутри полиполярной окружности отражены во внешнюю область. Каждой точке мотива с координатами $\rho_0 = (\rho_{10}, \rho_{20})^{1/2}$ и $\varphi_0 = (\varphi_{10} + \varphi_{20})/2$, где $(\rho_{10}, \varphi_{10})$ и $(\rho_{20}, \varphi_{20})$ – обычные монополярные координаты этой точки относительно первого и второго фокусов, поставлена в соответствие точка с координатами $\rho'_0 = 1/\rho_0$ и $\varphi'_0 = \varphi_0$, т.е. каждая точка перемещена вдоль угловой изолинии $\varphi = \mathrm{const} = \varphi_0$ на соответствующее расстояние $(\rho_0 \cdot \rho'_0 = 1)$. Внешние образы отраженных мотивов оказались, как и в классической полярной СК, по размерам больше, но, в отличие от нее, в полиполярной СК они претерпели еще и разные искривления формы. Рис. 3 иллюстрирует также *поворотную симметрию* - вдоль единичной 2*f*-лемнискаты через равные полиполярные угловые интервалы расположены объекты данного мотива и отраженного, полученные в результате применения преобразования полиполярного поворота на $\Delta\varphi = \pi/4$, При этом произвольной точке мотива с координатами $\rho_0$ и $\varphi_0$ поставлена в соответствие точка с координатами $\rho'_0 = \rho_0$ и $\varphi'_0 = \varphi_0 + \Delta\varphi$, т.е. точка перемещалась вдоль метрической изолинии $\rho = \mathrm{const} = \rho_0$ на $\Delta\varphi$ (монополярные интервалы $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, естественно, не были равными).

В АСО-координатах построенные симметрии представляют собой композицию полиполярных симметрий и симметрий структурного начала координат ППЛ.

**Криволинейные симметрии.** Построение всех групп криволинейных симметрий возможно на многофокусных лемнискатах, произвольных по числу фокусов, форме и связности. На рис. 4*а* приведены иллюстрации симметрийных построений с прежним мотивом, для односвязной (рис 4*а* внизу) и двусвязной (рис 4*а* вверху) лемнискаты-окружности. Поворотные преобразования для последней выполняются в порядке: от крайней правой точки ($\varphi = 0$) по верхней части правой петли, скачкообразный переход и полный обход левой петли, возврат на правую до исходной точки ($\varphi = 2\pi$).



*а*) *б*)

Рис. 4. Симметрии для 2*f*-структуры разной связности (*а*) и конфигурации (*б*)

Фокусное представление полиполярной окружности позволяет менять ее симметрии и формы мотива, управляя фокусами (рис. 4*б*)).

*Сближая фокусы kf-структуры в одну точку, получим обычную окружность с визуально идентичной формой мотива.*

Действительно, произвольная точка с координатами $(\rho_1, \varphi_1)$ некоторого мотива имеет соответствующие данной группе симметрий точки ($\rho_i$, $\varphi_i$), где $i$ = 2, …, $m$, в других мотивах ($m$ количество мотивов). В случае, например, поворотной симметрии, представленной на рис.3, данные точки имеют одно и то же значение метрической координаты $\rho_i = \rho_0$ и отличающиеся на $\Delta\varphi$ значения ориентационной координаты $\varphi_i = (i\text{-}1)\Delta\varphi$, $i$ = 1, …, $m$. Осуществляя непрерывный предельный переход *kf*-структуры в точку, указанные соотношения между выделенными точками сохраняются. В пределе, как было показано выше, любая *kf*-лемниската трансформируется в окружность. Значит, данные точки окажутся на окружности, отличаясь по угловой координате на те же $\Delta\varphi$. Поскольку это относится к произвольной точке произвольного мотива, все мотивы окажутся одинаковыми, расположенными на окружности через равные угловые интервалы (рис 4*б*).

Таким образом, действительно, сближая фокусы *kf*-структуры в одну точку, несимметричная, с точки зрения АСО-восприятия, и симметричная, с точки зрения ППЛ-восприятия, непрерывно трансформируется в обычную АСО-окружность с визуально идентичной формой мотива.

На рис. 5 представлен другой вид симметрии на 3*f*-лемнискатах. Единичная "окружность-лемниската" с 3*f*-структурой в произвольно-несимметричном и симметрично-правильном вариантах. Здесь использован другой мотив и симметрии зеркального отражения заменены на симметрии локальной ***инверсии***, а ***повороты*** выполнены на угол **$\pi$/6**.

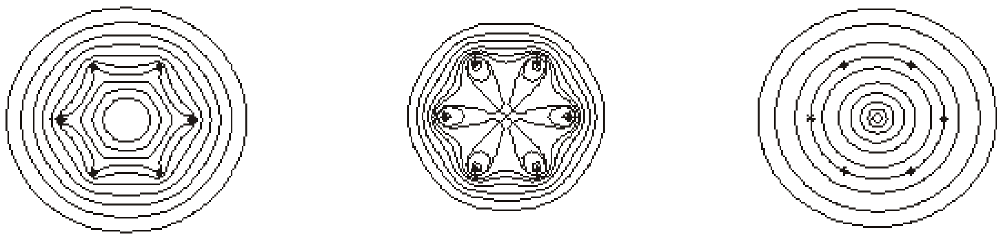
*а*) *б*)

Рис. 5. Криволинейные симметрии инверсии и поворотов на угол $\pi/6$ на 3*f*-лемнискатах с асимметричной (*а*) и симметричной (*б*) структурой.

Симметрии наследуются и квазилемнискатами - фокусными кривыми с аддитивным, вместо мультипликативного (1), инвариантом [6]:

$$\sum_{j=1}^{k} r_j(x,y) = S \ ,$$

где $r_j(x,y)$ может быть разной функцией евклидова расстояния. Тождественный вариант задает семейство многофокусных «эллипсов», а логарифмическая функция – семейство многофокусных лемнискат (1). На рис. 6 представлены семейства квазилемнискат с разным функционалом расстояния: *а*) «корни» $\varphi(r) = r1/3$; *б*) лемнискаты $\varphi(r) = \ln(r)$; *в*) эллипсы $\varphi(r) = r$. Как можно видеть, *Kf*-лемнискаты удерживают фокусы, а *kf*-эллипсы и *kf*-«корни» теряют их, стягиваясь к центру *kf*-структуры - центру симметрии.



*а*) *б*) *в*)

Рис. 6. Семейства изофокусных 6*f*-квазилемнискат с правильной гексагональной системой фокусов

Комбинирование симметрий *kf*-лемнискат и форм-мотивов позволяет получить большое разнообразие орнаментов, как розеточного типа, так и паркетного, а интерактивное управление фокусами в компьютерном эксперименте дает возможность непрерывной трансформации орнамента.

**Заключение.** Полиполярная система координат представляется хорошо организованной криволинейной СК, характеризующей точку плоскости полиполярным радиусом ρ и полиполярным углом φ. Объектами ППЛ являются: структурное начало, состоящее из конечного множества фокусов и определяющее ее симметрии, а также взаимно ортогональные сопряженные координатные семейства лемнискат ρ = const и градиентных кривых φ = const. При этом метрическая координата ρ рассматривается как расстояние до структурного начала, а ориентационная координата φ - как направление на структурное начало полиполярной системы координат.

Особенностью полиполярной системы координат является широкий диапазон применимости от универсальности до узкой специализации. Такая особенность является следствием возможностей рассматриваемого класса функций - многофокусных лемнискат, которые допускают множество самых разнообразных приложений. Одним из наиболее значительных приложений является аппроксимация эмпирических кривых [2, 5]. Манипулируя положением фокусов и их количеством, можно решать также задачу интерактивной генерации форм для дизайнерских, диагностических и других целей. С любым конкретным предметным образом можно связать его *собственную систему координат*. Метрическая компонента при этом может быть произвольной, достаточно сложной, настраиваемой вручную или автоматически, и при любой форме метрической компоненты угловая компонента получается ортогональной к метрической. В таким образом организованной собственной полиполярной системе координат реализуемы разного рода представления, преобразования и симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркушевич, А.И.* Теория аналитических функций, т.1 [Текст]. – М.: Наука, 1967. С. 486.
2. *Ракчеева, Т.А.* Приближение кривых: фокусы или гармоники [Текст]. //МКО. Сб. ст. Вып. 14, т.2. – М.-Ижевск, 2007. С.83-90.
3. *Ракчеева, Т.А.* Полиполярная лемнискатическая система координат [Текст]. // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Том 1, № 3. С. 251-261.
4. *Ракчеева, Т.А.* Симметрии формы многофокусных лемнискат [Текст]. //Симметрии: теоретический и методический аспекты. Сб. ст. III Международного симпозиума, 2009. С. 66-75.
5. *Ракчеева, Т.А.* Приближение кривых многофокусными лемнискатами на комплексной плоскости [Текст]. //МКО. Сб. ст. Вып.15, т.2. – М.-Ижевск, 2008. С.68-75.
6. *Ракчеева, Т.А.* Квазилемнискаты в задаче приближения [Текст]. // Третьи Курдюмовские чтения: Синергетика в естественных науках: Материалы международной междисциплинарной научной конференции. – Тверь, 2007. С. 113-117.
7. *Hilbert, D.* Gessamelte Abhandlungen [Text]. - Berlin: Springer, 1935. Bd. 3. P. 435.

## SYMMETRIES OF POLYPOLAR COORDINATION

**T. Rakcheeva**

*Mechanical Engineering Research Institute, RAS (Moscow)*
*4, Bardina st., Moscow, 119991, Russia*

*Abstract.* The polypolar system of coordinates formed by a family of multifocal lemniscates is introduced, the full gang of which focuses forms its structural beginning. The arbitrary point of a plane has, as well as in a classical polar system of coordinates, polypolar coordinates: metric ρ, and angular φ, being functions of polar coordinates of rather each of focuses. The focal representation of the curve form by multifocal lemniscates allows to adjust a polypolar system of coordinates so that a metric component corresponded to the form of the given curve. Lemniscate and its focal structure have the same group of symmetries. The symmetries of polypolar coordination, and also curvilinear symmetries on multifocal lemniscates are considered.

*Key words*: curvilinear system of coordinates, symmetries, curves, focuses, lemniscates, degrees of freedom, approximation.

## ФИЗИКА