МАТЕМАТИКА

УДК 514.76/+512.74

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АФФИННО-СВЯЗНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, БЛИЗКИХ К СИММЕТРИЧЕСКИМ

О.А. Матвеев* , Е.Л. Нестеренко**

** Московский государственный областной университет*
105005, Москва, ул. Радио, 10а

***Российский университет дружбы народов (РУДН)*
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Рассматриваются алгебраические свойства просимметрических, почти симметрических и антисимметрических многообразий аффинной связности, близких к симметрическим пространствам.

Ключевые слова: квазигруппа, геодезическая лупа, аффинная связность, симметрическое пространство.

Развитие геометрии от Эрлангенской программы Феликса Клейна и работ Софуса Ли, трудов Эли Картана ([1]-[3]) по симметрическим пространствам и теории связностей и, наконец, теория связностей в расслоениях выявили фундаментальную роль, которую играет понятие группы в геометрии. Современные исследования показывают, что не меньшее значение в геометрии имеют и неассоциативные алгебраические структуры, такие как квазигруппы, лупы ([4] –[8]). Здесь мы имеем в виду теорию гладких неассоциативных универсальных алгебр с их касательными объектами. Так вместо дифференцируемой группы и ее алгебры Ли появляется гладкая квазигруппа с определенными тождествами и ее касательная тройная система Ли. Наиболее ярко это прозвучало в дифференциальной геометрии в связи с алгебраическим описанием пространств аффинной связности (прежде всего симметрических и редуктивных) .

В нашей работе мы рассматриваем три алгебраические модели пространства аффинной связности: $\mathrm{M} =< M, L, (\omega_t)_{t\in R} >$, $\mathrm{M} =< M, L, (\omega_t)_{t\in R}, \mathrm{L} >$, $\mathrm{M} =< M, (\omega_t)_{t\in R} >$.

1. Геоодулярное многообразие $\mathrm{M} =< M, L, (\omega_t)_{t\in R} >$ есть дифференцируемое многообразие, где в каждой точке определён одуль, (одуль – это обобщение векторного пространства), определена операция умножения на скаляры. Операции геодезической лупы подчиняются определенным алгебраическим тождествам, достаточным для однозначного восстановления аффинной связности. Эти тождества называются тождествами геоодулярности.
(Терминология введена в результате исследований школы профессора Л.В. Сабинина.)

$L_{t_y x}^{u_y x} L_{u_y x}^{y} = L_{t_y x}^{y}$ - первое тождество геоодулярности,

$L_x^y t_y = t_x L_x^y$ - второе тождество геоодулярности.

2. В некоторых специальных случаях мы пользуемся более сложной алгебраической моделью – геодвуодулярным многообразием $\mathrm{M} =< M, L, (\omega_t)_{t \in R}, \mathsf{L} >$, где добавляется вторая тернарная операция L и выполняется

$L_x^y \mathsf{L}_z^y = \mathsf{L}_{L_x^y z}^x L_x^y$ - третье тождество геоодулярности.

Второе и третье тождества геоодулярности означают, что параллельный перенос есть изоморфизм касательного пространства в точке y на касательное пространство в точке *x*.

3. В третьей модели, называемой многообразием с геодезическими, мы изначально не рассматриваем тернарные операции L и *L*: $\mathrm{M} =< M, (\omega_t)_{t \in R} >$, то есть имеем дело с геодезическими линиями многообразия аффинной связности.

Параллельный перенос *L* отрезка геодезической вдоль геодезической линии пространства аффинной связности представляет собой левый сдвиг геодезической лупы, в окрестности каждой точки пространства определена операция умножения точек на скаляры, что связано с каноническим (аффинным) параметром геодезической линии. Кроме того, с каждой точкой пространства можно связать структуру векторного пространства, получаемого из касательного пространства экспоненциальным отображением. Сложение векторов в касательном пространстве в каждой точке многообразия дает возможность определить операцию L.

Теорема. (Сабинин Л.В.).([6]) Категория гладких многообразий аффинной связности эквивалентна категории гладких локальных геоодулярных (или геодвуодулярных) многообразий.

Действительно, если **(**M**,** ∇**)** -гладкое многообразие аффинной связности, то для любой точки $y \in \mathrm{M}$ в ее нормальной выпуклой окрестности можно определить гладкие локальные операции формулами:

$$L_x^y z = Exp_x \tau_x^y \left((Exp_y)^{-1} z \right), \quad \omega_t(y,z) = t_y z = Exp_y \left(t (Exp_y)^{-1} z \right),$$

$$\mathsf{L}_x^y z = Exp_y \left((Exp_y)^{-1} x + (Exp_y)^{-1} z \right),$$

где $\tau_x^y : T_y(M) \to T_x(M)$- параллельный перенос вдоль единственной геодезической, соединяющий точки x и y. Таким образам, получаем гладкое локальное геодвуодулярное многообразие $\mathrm{M} =< M, L, (\omega_t)_{t \in R}, \mathsf{L} >$.

Обратно, если $\mathrm{M} =< M, L, (\omega_t^y)_{t \in R} >$ - гладкое локальное геоодулярное многообразие, то определяем аффинную связность формулами:

$$(\nabla_X Y)_y = \frac{d}{dt} \left[\left(L_{x(t)}^y \right)_{*,y}^{-1} Y_{x(t)} \right]_{|t=0}, \quad x(0) = y; \quad \frac{d}{dt}(x(t))_{|t=0} = X_y,$$

где X, Y - векторные поля на M, $\left(L_z^y\right)_{*,y}$ - касательное отображение к левому сдвигу L_z^y.

Симметрические пространства обладают математически красивыми алгебраическими свойствами - геодезические симметрии относительно каждой точки являются локальными изоморфизмами аффинной связности. Ввиду богатства топологической и алгебраической структуры эти пространства являются удобным материалом, на котором проверяется эффективность многих современных математических методов. Самые разнообразные вопросы из дифференциальной геометрии, теории групп, дифференциальных уравнений, аналитической механики, теоретической физики часто сводятся к тем или иным задачам на симметрических пространствах. В работе О. Лооса «Симметрические пространства» ([9])доказано, что аналитическое симметрическое пространство может рассматриваться, как одна аналитическая идемпотентная левообратимая и леводистрибутивная квазигруппа:

xx=x – тождество идемпотентности;
x(xy)=y – тождество левой обратимости;
x(yz)=(xy)(xz) – тождество левой дистрибутивности.

В наших обозначениях О. Лоос рассматривал геодезическую квазигруппу, соответствующую действительному числу, равному «-1». Левые сдвиги этой квазигруппы и есть геодезические симметрии относительно точки. Позднее этот результат был обобщен в школе проф. Сабинина Л.В.. Произвольному пространству аффинной связности можно сопоставить однопараметрическое семейство локальных идемпотентных эластичных квазигрупп (тождество эластичности: x(yx)=(xy)x)), определяемых каноническим (аффинным) параметром вдоль геодезических линий.

В многообразии с геодезическими $M =< M, \left(\omega_t\right)_{t\in R} >$ выполняются следующие условия:

а) для любого x из M существует такая открытая окрестность U_x, содержащая x , что для любых y из U_x, для любого вещественного числа $t \in [0,1]$, $t_x y$ определено, и $t_x y \in U_x$.

Замечание. На языке пространств аффинной связности это условие означает существование нормальной выпуклой окрестности в каждой точке многообразия.

б) если $t_x y$ определено, то $u_x\left(t_x y\right)$ определено тогда и только тогда, когда определено $\left(ut\right)_x y$, и в этом случае

$$u_x\left(t_x y\right) = \left(ut\right)_x y, \quad u,t \in R, \quad x, y \in M \quad ; \tag{1}$$

в) выполняется тождество

$$t_x y = \left(1-t\right)_y x, \quad t \in R, x, y \in M \quad ; \tag{2}$$

г) если $1_x y$ определено, то

$$1_x y = y \quad . \tag{3}$$

Заметим, что тождества (1), (2), (3) позволяют однозначно восстановить аффинную связность с нулевым тензором кручения.

Таким образом, был построен алгебраический эквивалент экспоненциального отображения, в частности подробно были изучены локально плоские и симметрические многообразия с геодезическими. Некоторые классы пространств аффинной связности однозначно описываются системой тождеств. Например, симметрические пространства есть пространства с геодезическими, в которых выполняются следующие тождества:

$$(-1)_x(-1)_{t_x y} = (-1)_{t_y x}(-1)_y , \tag{4}$$

$$(-1)_x t_y = t_{(-1)_x y}(-1)_x . \tag{5}$$

Ввиду важности симметрических пространств в научных исследованиях, представляет интерес рассмотрение пространств аффинной связности, близких к симметрическим по алгебраическим свойствам.

Пространство называется просимметрическим, если оно имеет общие геодезические линии с симметрическими пространствами. Проведено последовательное построение теории просимметрических и близких к ним пространств ([10] – [19]). В частности получено

Предложение. Геометрический одуль $\mathcal{M}_e =< M, L^e, \{t_e\}_{t\in R}, e >$ просимметричен, если и только если выполняются тождества:

$$\left[L^e_{L^e_x(-1)_e y}\right]^{-1} \circ L^e_x \cdot (-1)_e \circ \left(L^e_x\right)^{-1} \circ L^e_{L^e_x y} \circ t_e =$$

$$= t_e \circ \left[L^e_{L^e_x(-1)_e y}\right]^{-1} \circ L^e_x \circ (-1)_e \circ \left(L^e_x\right)^{-1} \circ L^e_{L^e_x y},$$

$$L^e_{L^e_x(t+1)_e y} \circ (-1)_e \circ \left[L^e_{L^e_x t_e (t+1)_e y}\right]^{-1} \circ L^e_{L^e_x t_e y} \circ (-1)_e \circ \left[L^e_{L^e_x t_r y}\right]^{-1} =$$

$$= L^e_{L^e_x y} \circ (-1)_e \circ \left(L^e_{L^e_x y}\right)^{-1} \circ L^e_x \circ (-1)_e \circ \left(L^e_x\right)^{-1}$$

Замечание. Эти два тождества являются алгебраической переформулировкой тождеств (4) и (5).

Алгебраическая зависимость двух геодезических одулей просимметрического пространства в двух разных точках в общем случае представляется сложной. Поэтому особый интерес вызывают случаи, когда можно достаточно простым "алгебраическим действием" пересчитать бинарную операцию умножения в произвольной точке по известной операции умножения в заданной точке. В настоящее время, по-видимому, хорошо известно лишь три варианта простой алгебраической связи двух достаточно близких геодезических луп пространств аффинной связности. Это, во-первых, редуктивные пространства, во-вторых, почти симметрические и, в частности, антисимметрические, и в-третьих, пространства нулевой кривизны. В первых двух случаях геодезические лупы связных компонент пространства изоморфны, а в третьем - изотопны.

Почти симметрические пространства аффинной связности в алгебраическом определении впервые, по-видимому, были введены в школе профессора Л.В. Сабинина в 1980–х гг. Первоначальные их алгебраические и дифференциально-геометрические свойства были исследованы в работах Л.В. Сабинина, П.О. Михеева, О. А. Матвеева.

По алгебраическому определению просимметрическое пространство аффинной связности является почти симметрическим, если композиция двух геодезических симметрий является автоморфизмом геометрической структуры пространства.

Предложение. Одуль $M = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in R}, e\rangle$ может быть реализован как одуль центрированный около e натуральной геоодулярной структуры многообразия почти симметрической аффинной связности, тогда и только тогда, когда выполняются следующие тождества:

$$\varphi_{(t+u)_e x}\ x = \varphi_{\ t_e x} \circ \varphi_{\ u_e x}$$

$$L^e_{t_e x} \circ \phi_{\ x} = L^e_x \circ \phi_x \circ L^e_{(t-1)_e x}$$

$$\bar{l}^e(x,y) \circ L^e_z = L^e_{\bar{e}^e(x,y)z} \circ \bar{l}^e(x,y)$$

$$\bar{l}^e(x,y) \circ t_e = t_e \circ \bar{l}^e(x,y)$$

где

$$\varphi_x = \left(L^e_x\right)^{-1} S^e_x; \qquad S^e_x = \left(L^e\right)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e \circ \left(L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x}\right)^{-1} \circ (-1)_e;\ x, y, z \in M,$$

$$\bar{l}^e(x,y) = \left(S^e{}_{S^e_x y}\right)^{-1} \circ S^e_x \circ S^e_y; \quad u, t \in R.$$

Антисимметрические пространства образуют подкласс почти симметрических пространств. Это немедленно следует из алгебраического определения антисимметрического пространства: геодезическая симметрия S есть антиизоморфизм геометрической структуры этого пространства, то есть $\forall a, x, y, z \in M \qquad S_a\left(y \underset{x}{\cdot} z\right) = S_a z \underset{S_a x}{\circ} S_a y$.

Предложение. Геодезическая лупа гладкого антисимметрического многообразия бинарно-лиева, то есть в частности справедливы следующие тождества:

$$x \cdot (x \cdot y) = x^2 \cdot y \qquad \text{левая альтернативность,} \tag{6}$$

$$x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot x \qquad \text{эластичность,} \tag{7}$$

$$(x \cdot y) \cdot y = x \cdot y^2 \qquad \text{правая альтернативность,} \tag{8}$$

и выполняется следующее тождество:

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} \ . \tag{9}$$

Недавно было установлено, что в геодезической лупе антисимметрического многообразия выполняются тождества

$$b\left[\left(b^{-1}a^2b^{-2}a^2b^{-1}\right)b^{-1}\left[a\left[\left(a^{-1}b^2a^{-1}\right)\cdot\left(a^{-1}za^{-1}\right)\right]a\right]b^{-1}\right]b = a\left[\left(ab^2a\right)\cdot\left(a^{-1}za^{-1}\right)\right]a \;, \qquad (10)$$

$$a\left[\left(a^{-1}b^2a^{-1}\right)\left(az^{-1}a\right)\right]a = b^2\left[a^{-1}\left[\left(az^{-1}a\right)\left(ab^{-2}a\right)\right]a^{-1}\right]b^2 \;, \qquad (11)$$

$$x\left(y\left(xzx\right)y\right)x = \left(xyx\right)z\left(xyx\right) \;, \qquad (12)$$

$$\left(xy^2x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x\left(y\left(zw\right)y\right)x\right)\left(xy^2x\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\left(xy^2x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x\left(yzy\right)x\right)\left(xy^2x\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\left(xy^2x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x\left(ywy\right)x\right)\left(xy^2x\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \;. \qquad (13)$$

Суммируя полученные результаты, приходим к следующему предложению.

Предложение: Для того чтобы лупа являлась геодезической в некоторой точке антисимметрического пространства необходимо выполнение тождеств (6) - (13).

Взаимное расположение обсуждаемых классов пространств указано на следующем рисунке.

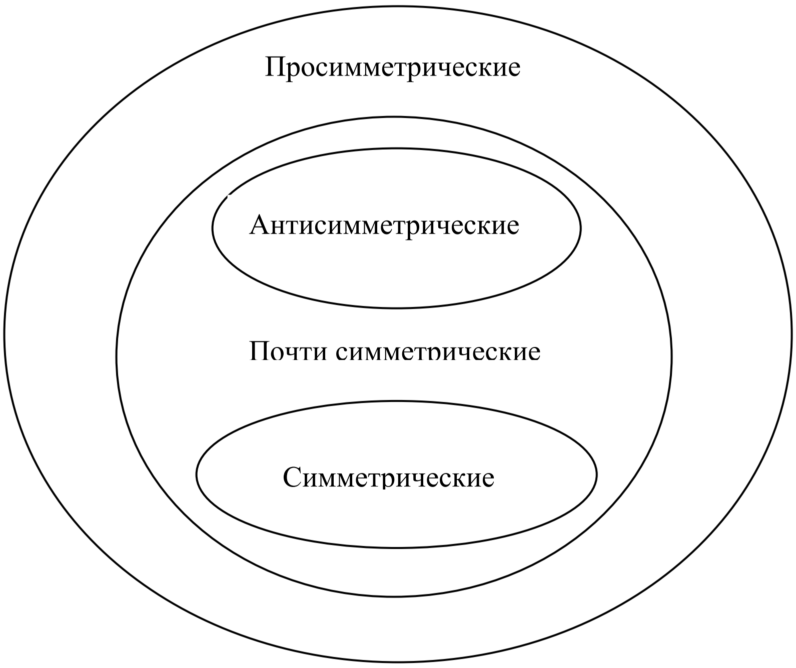

Рис.1 Взаимное расположение классов

ЛИТЕРАТУРА

1. *Картан, Эли.* Геометрия групп Ли и симметрические пространства. [Текст] //Сборник работ. – М.: ИЛ. - 1949. - 384 с.
2. *Картан, Эли.* Геометрия римановых пространств. [Текст] – М.-Л. ОНТИ. - 1936. - 244 с.
3. *Картан, Эли.* Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера. – М.: Из-во Моск. Ун-та. - 1963. - 367 с.
4. *Akivis, M.A., Goldberg V.V.* Local algebras of a differential quasigroupx [Text]. //Bulletin of the American mathematical society. – V. 43, 2, 2006, p.p. 207-226.
5. *Figula, Agota.* Geodesic loops [Text]. //Journal of Lie theory. - V. 10. - 2000. – p.p.455-461.
6. *Sabinin, L.V.* Non-Associative Algebra and its applications [Text]. //A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. - V. - chapter 19. - Champan &Hall /CRC . - 2006 . - USA/.
7. *Sabinin, L.V., Matveyev O.A.* Geodesic loops and some classes of affinely connected manifolds. (Survey on odular geometry) [Text]. //Вестник РУДН. - 2(1). - 1995. - С. 135-243.
8. *Matveyev, O.A.* On quasigroup theory of manifolds with trajectories. Webs and quasigroups [Text]. Tver. 2000 p.p. 129-139.
9. *Лоос, О.* Симметрические пространства. [Текст] – М.: Наука. - 1985. - 208 с.
10. *Matveyev, O., Nesterenko E.L.* On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. Webs and Quasigroups. Tver, 2002, pp. 78-85.
11. *Matveyev, O., Nesterenko E.L* The real prosymmetric spaces [Text]. Non – associative algebra and its applications. 2006, V.246, Ch. 19, pp.253-260.
12. *Матвеев, О.А.* О пространствах аффинной связности, близких к симметричным [Текст]. // Геометрия обобщенных пространств. Межвузовский сб-к. - Пенза. - 1992.
13. *Матвеев, О.А, Нестеренко Е.Л.* О двусторонних пространствах аффинной связности [Текст]. //Материалы международной научно-практической конференции «Л.Эйлер и Российское образование, наука и культура». - г. Тула. - 2-5 мая 2007г. - С. 207.
14. *Матвеев, О.А, Нестеренко Е.Л.* Алгебраические и геометрические свойства просимметрических пространств [Текст]. //XXXVI всероссийская научная конференция по проблемам математики, информатики, физики, химии и методики преподавания естественнонаучных дисциплин. - Тезисы докладов. - Математические секции. – М.: Изд-во РУДН. - 2000. - С.6.
15. *Матвеев, О.А, Нестеренко Е.Л.* О теории редуктивных проабелевых пространств [Текст]. //Труды кафедры геометрии Московского Государственного областного университета №2. - Сборник научно-методических работ. – Москва: Издательство МГОУ. - 2005. - С.32-36.
16. *Матвеев, О.А., Нестеренко Е.Л.* Просимметрические пространства [Текст]. //Вестник РУДН. - серия математика. - 7(1). - 2000. - С. 114-126.
17. *Нестеренко, Е.Л.* Алгебраические свойства аффинной связности на касательном расслоении [Текст]. //Фундаментальные проблемы Физики и математики. – Москва. - 2004. - Государственный Технологический Университет «СТАНКИН». - Институт математического моделирования РАН. - С. 31-45.

18. *Нестеренко, Е.Л.* Редуктивные проабелевы пространства [Текст]. //Актуальные проблемы математики и методики преподавания. - Пензенский университет. - 2001. - С. 76-78.
19. *Нестеренко, Е.Л.* Свойства просимметрических пространств [Текст]. //Тезисы научных докладов Международной научно-практической конференции «Народное образование в XXI веке», посвященной 70-летию МПУ. - М.: Изд-во МПУ «Народный учитель». - 2001. - С. 43.

ALGEBRAIC PROPERTIES OF SOME CLASSES OF THE AFFINELY CONNECTED MANIFOLDS, CLOSE TO THE SYMMETRIC

O. Matveyev*, H. Nesterenko**

**Moscow region state university*
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

***Peoples' Friendship University of Russia (PFUR)*
6, Miklucho-Maklaya str., 117198, Moscow

Abstract. We consider algebraic properties of prosymmetric, almost symmetric and antisymmetric of affinely connected manifolds, close to symmetric spaces.

Key words: quasigroup, geodesic loop, affine connection, the symmetric space.

УДК 514.7

СИММЕТРИИ ПОЛИПОЛЯРНОЙ КООРДИНАЦИИ

Т.А. Ракчеева

Институт машиноведения РАН (Москва)
117334, Москва, ул. Бардина, 4

Аннотация. Вводится полиполярная система координат, формируемая семейством многофокусных лемнискат, полный набор фокусов которой образует ее структурное начало. Произвольная точка плоскости имеет, как и в классической полярной системе координат, полиполярные координаты: метрическую ρ, и угловую φ, являющиеся функциями полярных координат относительно каждого из фокусов. Фокусное представление формы кривой многофокусными лемнискатами позволяет настроить полиполярную систему координат таким образом, чтобы метрическая компонента соответствовала форме заданной кривой. Лемниската и ее фокусная структура имеют одну и ту же группу симметрий. Рассмотрены симметрии полиполярной координации, а также криволинейные симметрии на многофокусных лемнискатах.
Ключевые слова: криволинейная система координат, симметрии, кривые, фокусы, лемнискаты, степени свободы, аппроксимация.