Научная статья
УДК 530.12
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-4-43-53

О МЕТРИКЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ ДЛЯ НЕПОДВИЖНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

Кухаренко Н. И.

Независимый исследователь, г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация
e-mail: n_kuharenko@mail.ru

Поступила в редакцию 05.03.2024
После доработки 03.06.2024
Принята к публикации 11.06.2024

Аннотация
Цель. Работа выполнена с целью получения приближённого выражения пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы, являющейся обобщением метрики Шварцшильда для неподвижных наблюдателей, находящихся на любых отличных от нуля расстояниях от точечной массы.
Процедура и методы. Проведён анализ и использована структура метрики Шварцшильда и зависимости компонент метрического тензора от разности потенциалов гравитационного поля, что является одним из основных положений общей теории относительности.
Результаты. Получено приближённое выражение пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы, являющееся обобщением метрики Шварцшильда для случая неподвижных наблюдателей, находящихся на любых отличных от нуля расстояниях от точечной массы. Полученная метрика асимптотически стремится к метрике Шварцшильда по мере удаления наблюдателя от точечной массы и является, как минимум, первым постньютоновским приближением к точному решению.
Теоретическая и практическая значимость. Анализ полученного выражения пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы позволяет сделать вывод о том, что относительные горизонты видимости для наблюдателей с конечными радиальными координатами располагаются на сферах с радиальными координатами меньшими, чем гравитационный радиус.
Ключевые слова: общая теория относительности, решение Шварцшильда, наблюдатель, центрально-симметричное гравитационное поле
Для цитирования.
Кухаренко Н. И. О метрике гравитационного поля точечной массы для неподвижных наблюдателей // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 4. С. 48-53. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-43-53

Original research article

ON THE METRIC OF THE GRAVITATIONAL FIELD OF A POINT MASS FOR STATIONARY OBSERVERS

N. Kukharenko

Independent researcher, Zhukovsky, Moscow region, Russian Federation
e-mail: n_kuharenko@mail.ru

Received by the editorial office 05.03.2024
Revised by the author 03.06.2024
Accepted for publication 11.06.2024

Abstract
Aim. The work is performed with the aim of obtaining an approximate expression for the space-time metric of the centrally symmetric gravitational field of a point mass, which is a generalization of the Schwarzschild metric for stationary observers located at any non-zero distance from the point mass.
Methodology. The analysis was carried out, the structure of the Schwarzschild metric and the dependence of the components of the metric tensor on the potential difference of the gravitational field were used, which is one of the main provisions of the general theory of relativity.
Results. An approximate expression for the space-time metric of the centrally symmetric gravitational field of a point mass is obtained, which is a generalization of the Schwarzschild metric for the case of stationary observers located at any non-zero distance from the point mass. The resulting metric asymptotically tends to the Schwarzschild metric as the observer moves away from the point mass and is, at least, the first post-Newtonian approximation to the exact solution.
Research implications. Analysis of the obtained expression for the space-time metric of the centrally symmetric gravitational field of a point mass allows us to conclude that the relative horizons of visibility for observers with finite radial coordinates are located on spheres with radial coordinates smaller than the gravitational radius.
Keywords: general relativity, Schwarzschild solution, observer, centrally symmetric gravitational field
For citation:
Kukharenko, N. I. (2024). On the metric of the gravitational field of a point mass for stationary observers. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, pp.43-53. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-43-53

«Истина всегда оказывается проще, чем можно было предположить».
Р. Фейнман

Введение

При разработке основ общей теории относительности А. Эйнштейн отметил только один параметр, определяющий отличие метрики пространства-времени от эвклидовой. А именно – разность потенциалов гравитационного поля между точкой, где находится наблюдатель, и наблюдаемой точкой (см. [1, с. 105–114]). И до настоящего времени других первичных параметров, определяющих «искривление» пространства-времени, т. е. отличие метрики пространства-времени от эвклидовой, не отмечено [2–6]. Очень часто, однако, для разности потенциалов гравитационного поля используют обозначение φ, а не $\Delta\varphi$, и возможно для краткости, используют термин «потенциал». В том, что речь идёт именно о разности потенциалов гравитационного поля между наблюдателем и наблюдаемой точкой, убеждает, например, изящное разрешение «парадокса часов». Так, в книге К. Мёллера (см. [5, с. 208–212]) используется выражение для вычисления разности потенциалов гравитационного поля, хотя используется термин «гравитационный потенциал». В книге Р. Толмена (см. [6, с. 199–204]) используется термин «разность значений гравитационных потенциалов» и обозначение $\Delta\psi$. Важно, однако, отметить следующее. В книге «Теория поля» Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица (см. [2, с. 317–321]) приводится выражение для компонента g_{00} метрического тензора для нерелятивистского случая, т. е. случая малых скоростей (по сравнению со скоростью света c) и слабых гравитационных полей (точнее, малых значений разности потенциалов φ гравитационного поля между наблюдателем и наблюдаемой точкой). «…*Возводя в квадрат и опуская члены, обращающиеся при* $c \to \infty$ *в нуль, находим:* $ds^2=(c^2+2\varphi)dt^2-d\mathbf{r}^2$ *, где мы учли, что* $\mathbf{v}dt=d\mathbf{r}$.

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора в предельном случае равна $g_{00}=1+\frac{2\phi}{c^2}$. (87,12)» [2, с. 320].

Здесь s – интервал, **v** – вектор скорости, **r** – вектор координат. Понятно, что выражение *(87,12)* для компонента g_{00} метрического тензора является, вообще говоря, приближённым (первым постньютоновским приближением). Именно это выражение мы будем использовать для построения приближённого выражения пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы, являющейся обобщением метрики Шварцшильда, для неподвижных наблюдателей, находящихся на любых отличных от нуля расстояниях от точечной массы.

1. Анализ решения Шварцшильда

Если внимательно рассмотреть решение Шварцшильда, то можно отметить, что выражение $g_{00}=1+\frac{2\phi}{c^2}$, где $\phi=-\frac{km}{r}$, для этого решения является точным (в координатах Шварцшильда) везде, где $\phi>-c^2/2$, т. е. там, где $g_{00}>0$. Кроме того, в решении Шварцшильда $\phi=-\frac{km}{r}$ при любых $r > 0$ (r – радиальная координата наблюдаемой точки в решении Шварцшильда, «радиус-вектор r определён таким образом, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$» [2, с. 386], m – масса тела, k – гравитационная постоянная). Как известно, решение Шварцшильда является точным решением уравнений Эйнштейна для гравитационного поля точечной массы m

относительно «удалённого» наблюдателя. В решении Шварцшильда пространственно-временная метрика имеет вид:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_g}{r}) \cdot c^2 \cdot dt^2 - \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \cdot dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\psi^2), \qquad (1)$$

где ψ и θ – угловые координаты, $r_g = \frac{2km}{c^2}$ ([2, с. 385–394]). Если учесть, что $-\frac{r_g}{r} = \frac{2\phi}{c^2}$, то метрику в решении Шварцшильда можно записать в виде:

$$ds^2 = (1 + \frac{2\phi}{c^2}) \cdot c^2 \cdot dt^2 - \frac{1}{(1 + \frac{2\phi}{c^2})} \cdot dr^2 - r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\psi^2) \cdot \qquad (2)$$

Это и означает, что выражение $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ для этого решения является точным там, где $\phi > -c^2/2$, т. е. там, где $g_{00} > 0$. Условие $\phi > -c^2/2$ эквивалентно условию $r > r_g$.

Строго говоря, в решении Шварцшильда термин «удалённый» наблюдатель означает, что наблюдатель находится на бесконечном расстоянии от точечной массы (точнее, его радиальная координата r_0 стремится к бесконечности). Только для такого наблюдателя в классическом (Ньютоновском) приближении выражение разности потенциалов гравитационного поля между наблюдателем и наблюдаемой точкой с радиальной координатой r имеет вид $\phi = -\frac{km}{r}$.

2. Построение приближённого выражения пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля

Построим в первом постньютоновском приближении метрику для наблюдателя, имеющего конечную радиальную координату r_v (“V” – от слова “Viewer” – наблюдатель), в гравитационном поле точечной массы. При этом будем следовать работам А. Эйнштейна (см. [1, с. 105-114]) и Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2, с. 317–321]. Вместо выражения $\phi = -\frac{km}{r}$ будем использовать выражение для разности потенциалов гравитационного поля $\Delta\varphi$ (в ньютоновском приближении) между наблюдателем, имеющим конечную координату r_v, и наблюдаемой точкой с радиальной координатой r:

$$\Delta\phi = \frac{km}{r_V} - \frac{km}{r}. \qquad (3)$$

Тот факт, что в решении Шварцшильда выражение $\phi = -\dfrac{km}{r}$ является точным при любых $r > 0$, даёт нам право поступить именно так и гарантирует, что метрика, которую получим в результате, если и не является точным решением, то, как минимум, является первым постньютоновским приближением.

Будем использовать те же «сферические пространственные координаты», что и в решении Шварцшильда (см. [2, с. 385–394]):

$x^0 = ct,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \psi,$

выражение для метрики:

$$ds^2 = g_{00} \cdot c^2 \cdot dt^2 - g_{11} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\psi^2)\,. \tag{4}$$

Тогда для компоненты метрического тензора g_{00} получаем выражение:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Delta\phi}{c^2} = 1 + \frac{2km}{c^2}\left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r}\right) = 1 + r_g\left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r}\right), \tag{5}$$

аналогично, для g_{11}:

$$g_{11} = -\frac{1}{1 + r_g\left(\dfrac{1}{r_V} - \dfrac{1}{r}\right)}, \tag{6}$$

выражения для $g_{22} = -r^2$ и $g_{33} = -r^2 \cdot \sin^2\theta$ те же, что и в решении Шварцшильда (см. [2, с. 385–394]).

В результате получаем следующие выражения для метрики:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Delta\phi}{c^2}\right) \cdot c^2 \cdot dt^2 - \frac{1}{\left(1 + \dfrac{2\Delta\phi}{c^2}\right)} \cdot dr^2 - r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\psi^2) \tag{7}$$

или, используя обозначение r_g для гравитационного радиуса:

$$ds^2 = \left(1 + r_g\left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r}\right)\right) \cdot c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 + r_g\left(\dfrac{1}{r_V} - \dfrac{1}{r}\right)\right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\psi^2)\,. \tag{8}$$

Теперь мы можем уточнить смысл термина «удалённый» наблюдатель в решении Шварцшильда. А именно: «удалённый» наблюдатель – это наблюдатель, для которого отличие $\Delta\phi = -\dfrac{km}{r}$ от более точного выражения $\Delta\phi = \dfrac{km}{r_V} - \dfrac{km}{r}$ пренебрежимо мало, т. е. величина $\dfrac{km}{r_V}$ пренебрежимо мала по сравнению с величиной $\dfrac{km}{r}$.

В результате подстановки выражений (6) и (7) для компонент метрического тензора в уравнения [2, с. 387], получим, что в этом случае компоненты тензора энергии-импульса:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \cdot T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4} \cdot T_0^0 = -\frac{r_g}{r_V \cdot r^2},$$

т. е. не равны нулю, что естественно на конечных расстояниях от тяготеющих тел. При стремлении r_v к бесконечности величина $\dfrac{r_g}{r_V \cdot r^2}$ стремится к нулю, и мы получаем условие на бесконечности, соответствующее решению Шварцшильда.

Легко видеть, что при $r_V \to \infty$ метрика (8) превращается в метрику решения Шварцшильда. Таким образом, можно считать, что полученные выражения (7) и (8) для наблюдателя, находящегося в точке с произвольным значением радиальной координаты r_V (в первом постньютоновском приближении), являются некоторым обобщением метрики Шварцшильда. Обратим внимание на то, что по мере приближения значения r_V к значению r (т. е. по мере приближения наблюдателя к наблюдаемой точке), компоненты метрического тензора g_{00} и g_{11} стремятся к единице, т. е. метрика приближается к метрике плоского пространства.

3. Дополнительные замечания

Вернёмся к рассмотрению метрики Шварцшильда (1). Сферическую поверхность радиуса r_g называют «горизонтом событий». Очевидно, что при стремлении $r \to r_g$, или, другими словами, при стремлении φ к $-c^2 / 2$, в связи с тем, что $g_{00} = (1-\frac{r_g}{r})\cdot c^2$ стремится при этом к нулю, а $-g_{11} = \dfrac{1}{(1-\frac{r_g}{r})}$ – к бесконечности, можно ожидать некоторых «особенностей». А именно: время распространения световых сигналов от сферы радиуса до удалённого наблюдателя становится бесконечным [2, с. 402]:

«… По отношению r_g к **внешнему наблюдателю** сжатие к гравитационному радиусу сопровождается “самозамыканием” тела. Время распространения посылаемых с тела сигналов стремится к бесконечности. Действительно, для световых сигналов $ds^2 = 0$ и в шварцшильдовой системе имеем $c \cdot dt = dr / (1 - r_g / r)$; время распространения от r до некоторого $r_0 > r$ даётся интегралом

$$c\Delta t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{1 - r_g / r} = r_0 - r + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \qquad (102,9)$$

Расходящимся при $r \to r_g$.

Интервалы собственного времени на поверхности тела сокращены по отношению к интервалам времени t **бесконечно удалённого наблюдателя** в отношении

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\ ;$$

при $r \to r_g$, следовательно, все процессы на теле по отношению к внешнему наблюдателю “застывают”» [2, с. 402].

Обратим внимание на то, что в приведённом фрагменте текста в одном предложении говорится о **бесконечно удалённом наблюдателе**, а чуть выше – о **внешнем наблюдателе**, что не вполне корректно. Выражения (7) и (8) для обобщения метрики Шварцшильда позволяют уточнить картину для **внешних наблюдателей**, имеющих конечные значения радиальной координаты r. Для метрики (7) и (8) особенности возникают тогда, когда значение $\Delta\phi$ стремится к $-c^2/2$, или, другими словами, при стремлении значения $\frac{2\Delta\phi}{c^2} = r_g\left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r}\right)$ к минус единице. Это означает, что при конечных значениях радиальной координаты наблюдателя r_v на сфере Шварцшильда (при $r = r_g$) никакой особенности нет, особенность появляется на сфере меньшего радиуса. Например, для наблюдателя, имеющего значение радиальной координаты $r_V = 2 \cdot r_g$, особенности будут возникать при $r = \frac{2}{3} r_g$, а для наблюдателя с $r_V = r_g$ при $r = \frac{1}{2} r_g$. Таким образом, понятно, что «горизонты событий» для **внешних наблюдателей** с различными радиальными координатами $r_V < \infty$ также расположены на сферах с различными радиальными координатами $r_{rvh} = \frac{r_g}{1 + \frac{r_g}{r_V}}$.
Поэтому правильнее будет применять термин «относительный горизонт событий», а ещё точнее – «относительный горизонт видимости» (Relative Visibility Horizon, [8; 9]). Легко видеть, что при стремлении r_V к бесконечности значение r_{rvh} стремится снизу к значению r_g, т. е. к гравитационному радиусу. Очевидно, что при любых конечных положительных значениях r_V значения $r_{rvh} < r_g$. Это означает, что относительные горизонты видимости для таких наблюдателей всегда располагаются внутри сферы Шварцшильда. Напомним также, что по мере приближения наблюдателя к наблюдаемой точке, метрика (7), (8) приближается к метрике плоского пространства при любых положительных значениях r_V (в том числе и при $r_V = r_g$).

Приведённые выше выводы согласуются с результатами анализа решения Толмена [2; 8; 9]. В книге «Теория поля» при рассмотрении гравитационного коллапса пылевидной сферы сделано следующее замечание: «Обратим внимание на то, что во всех случаях момент прохождения поверхности коллапсирующего шара под шварцшильдову сферу ($r(\tau,R)=r_g$) ничем не замечателен для его внутренней динамики (описываемой метрикой в сопутствующей системе отсчета)» [2, с. 409]. Как известно, решение Толмена – это точное решение уравнений Эйнштейна для гравитационного поля в материальной среде, полученное в общем виде для центрально-симметричного случая в пренебрежении давлением вещества, т. е. для «пылевидной» материи без вращения. Решение Толмена получено в сопутствующей системе координат, т. е. для наблюдателя, падающего вместе с «пылинками» вещества. Это решение как нельзя более подходит для анализа «космологических» задач, когда в качестве «пылинок» рассматриваются галактики и скопления галактик; давлением межгалактической пыли и давлением света, а также воздействием других полей, кроме гравитационного, на движение «пылинок» можно пренебречь. В том случае, когда начальная скорость пылинки равна нулю, наблюдатель, находящийся на падающей пылинке, отличается от неподвижного наблюдателя, имеющего такую же радиальную координату r_V, только наличием ускорения свободного падения. Для оценки величины ускорения свободного падения воспользуемся одним интересным свойством решения Толмена. В работах [3] и [7] показано, что выражение для ускорения свободного падения в сопутствующей системе координат имеет в точности тот же вид, что и в классическом законе всемирного тяготения Ньютона: $\ddot{r} = -\dfrac{km}{r^2}$, где r «… представляет собой “радиус”, определенный так, что $2\pi r$ есть длина окружности (с центром в начале координат)», ([2, с. 406]). Поскольку при выводе решения Толмена не делалось никаких предположений о слабости полей или малых массах, то это выражение в сопутствующей системе координат является некоторым обобщением закона всемирного тяготения Ньютона [7]. Отметим, что r в решении Толмена имеет тот же смысл, что и радиальная координата в решении Шварцшильда, что позволяет сопоставлять результаты этих точных аналитических решений уравнений Эйнштейна. Очевидно, что никаких особенностей для наблюдателя в сопутствующей системе координат нет при строго положительных значениях радиальной координаты r, т. к. в этом случае значение ускорения свободного падения конечно. Получим выражение для вычисления ускорения свободного падения на поверхности сферы Шварцшильда в том случае, когда вся масса расположена в начале системы координат (точечная масса), или когда масса равномерно распределена внутри сферы Шварцшильда:

$$\ddot{r} = -\frac{k \cdot m}{r_g^{\,2}} = -\frac{c^4}{4 \cdot k \cdot m}\,.$$

Обратим внимание на то, что значение ускорения свободного падения обратно пропорционально значению массы. Для массы Земли ($5976*10^{21}$ кг) и массы Солнца ($1.99*10^{30}$ кг) благодаря очень большому множителю $\frac{c^4}{k}$ эти значения огромны. Однако уже для массы 10000 галактик ($\sim 10000*10^{41}$ кг) значение ускорения свободного падения на поверхности сферы Шварцшильда имеет значение ~ 0.03 м/с^2, т. е. уже отнюдь не чрезмерно большое. Для массы $\sim 2*10^{53}$ (порядок массы нашей видимой Вселенной) получаем значение гравитационного радиуса ~ $3*10^{26}$ м (по порядку величин близко к размерам нашей видимой Вселенной), а для ускорения свободного падения на поверхности сферы Шварцшильда – значение $\sim 10^{-10}$ м/с^2. Понятно, что неподвижный и «падающий» в сопутствующей системе наблюдатели будут видеть практически одно и то же, не говоря уже об отсутствии для них какой-либо особенности на сфере Шварцшильда.

Отметим также, что выводы, полученные выше на основе предложенной метрики (выражения (7) и (8)), вполне согласуются также с принципом эквивалентности: «… всегда в любой интересующей нас пространственно-временной точке возможен переход к координатам, в которых эффекты гравитации исчезают в окрестности этой точки» [6, с. 183]. Отсюда следует, что в сопутствующей («падающей») системе координат пространство-время «плоское», во всяком случае в ближайшей окрестности падающего наблюдателя.

Интересно отметить часто встречающиеся в литературе утверждения о невозможности существования неподвижных тел под сферой Шварцшильда: «… мы имеем дело лишь с невозможностью осуществления при $r < r_g$ жесткой системы отсчета» [2, с. 398]; «Очевидно, никакое статическое тело не может иметь размер меньше r_g» [4, с. 90]; «ибо в этой области …(внутри сферы Шварцшильда) … недеформирующихся систем отсчета не существует»), опровергаются примером нашей видимой Вселенной. По имеющимся оценкам, её гравитационный радиус примерно равен её размерам (а возможно, и несколько их превосходит). По-видимому, можно считать, что мы (вместе с галактиками и звездами) находимся внутри “сферы Шварцшильда” для нашей видимой Вселенной. Мы находимся в роли наблюдателя на “падающей пылинке” в сопутствующей системе координат (как в решении Толмена). Однако скорости и ускорения нашей “пылинки” (галактики, солнечной системы) не настолько велики, чтобы невозможно было представить себе жесткую систему отсчета, хотя бы в пределах нашей видимой Вселенной. Следует обратить внимание, однако, что наблюдатель, для которого может быть осуществлена жесткая система отсчета, не является “удаленным наблюдателем”» [4, с. 90].

По-видимому, в рамках общей теории относительности (ОТО), теории, в самом названии которой подчёркивается, что эта теория рассматривает, что одно и то же явление выглядит различно для (*относительно*) различных наблюдателей, имеет смысл рассматривать те или иные объекты с точки зрения (т. е. *относительно*) таких наблюдателей, для которых эти объекты находятся «в пределах видимости». Попытки построить решение (и, например, жёсткую систему координат) для наблюдателя в области, находящейся за пределами относительного горизонта видимости, могут привести к некоторым некорректным выводам.

Представляется рациональным следующий порядок рассмотрения задач, в которых требуется учитывать эффекты ОТО. Сначала следует рассмотреть движение объекта наблюдения, (или явление в целом) в сопутствующей или, как минимум, в приближённой к объекту наблюдения системе координат. После этого можно выяснять, как выглядит это движение для наблюдателей, находящихся в различных точках относительно объекта наблюдения. Следует отметить, что возможны ситуации, когда для некоторых наблюдателей рассматриваемый объект наблюдения окажется за пределами их относительных горизонтов видимости (см. [8; 9]).

Заключение

1. Получено следующее приближённое выражение пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы, являющееся обобщением метрики Шварцшильда для неподвижных наблюдателей, находящихся на любых отличных от нуля расстояниях от точечной массы:

$$ds^2 = (1 + r_g(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r})) \cdot c^2 dt^2 - \frac{1}{(1 + r_g(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r}))} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\psi^2) \cdot$$

2. В результате анализа полученного выражения пространственно-временной метрики получено выражение для радиальных координат относительных горизонтов видимости (Relative Visibility Horizon) для наблюдателей с конечными радиальными координатами ($r_V < \infty$):

$$r_{rvh} = \frac{r_g}{1 + \frac{r_g}{r_V}}.$$

Понятно, что относительные горизонты видимости для наблюдателей с конечными значениями радиальных координат расположены ниже сферы Шварцшильда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. О принципе относительности и его следствиях // Эйнштейн А. Собрание научных трудов: в 4 т. Т. 1. Работы по теории относительности. М.: Наука, 1965. С. 65–114.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
3. Сборник задач по теории относительности и гравитации / А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски; пер. с англ. А. П. Бондарева, Ю. А. Данилова, под ред. И. М. Халатникова. М.: Мир, 1979. 536 с.
4. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967. 656 с.

5. Мёллер К. Теория относительности / пер. с англ. В. Г. Кречета, В. Г. Лапчинского, под ред. Д. Иваненко. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
6. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология / пер. с англ. В. М. Дубовика, В. К. Игнатовича, под ред. Я. А. Смородинского. М.: Наука, 1974. 520 с.
7. Кухаренко Н. И. Об одном свойстве решения Толмена // Преподавание физики в высшей школе. 2005. № 30. С. 121–123.
8. Кухаренко Н. И. Об относительных горизонтах видимости и разности потенциалов гравитационного поля // Преподавание физики в высшей школе. 2006. № 32. С. 198–200.
9. Кухаренко Н. И. К вопросу об использовании термина «горизонт событий» // Преподавание физики в высшей школе. 2007. № 34. С. 118–122.

REFERENCES

1. Einstein, A. (1965). On the Principle of Relativity and Its Consequences. In: Einstein, A. *Collected Scientific Works: in 4 volumes. Vol. 1. Works on the Theory of Relativity*. Moscow: Nauka publ., pp. 65–114 (in Russ.).
2. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1988). *Theoretical Physics: in 10 volumes. Vol. II. Field Theory*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.)
3. Lightman, A., Press, W., Price, R. & Teukolsky, S. (1979). *Problem book in Relativity and Gravitation*. Moscow: Mir publ. (in Russ.).
4. Zeldovich, Ya. B. & Novikov, I. D. (1967). *Relativistic Astrophysics*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
5. Möller, C. (1975). *The theory of relativity*. Moscow: Atomizdat publ. (in Russ.).
6. Tolman, R. (1974). *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
7. Kukharenko, N. I. (2005). On One Property of Tolman's Solution. In: *Teaching Physics in Higher School*, 30, 121–123 (in Russ.).
8. Kukharenko, N. I. (2006). On the relative horizons of visibility and the potential difference of the gravitational field. In: *Teaching Physics in Higher Education*, 32, 198–200 (in Russ.).
9. Kukharenko, N. I. (2007). On the use of the term “event horizon”. In: *Teaching Physics in Higher Education*, 34, 118–122. (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Кухаренко Николай Иванович (г. Жуковский, Московская обл.) – независимый исследователь;
e-mail: n_kuharenko@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Nikolay I. Kukharenko (Zhukovsky, Moscow region) – Independent researcher;
e-mail: n_kuharenko@mail.ru