МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-3-59-87-99

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ МНОГОМЕРНОМ СЛОЕ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО РОДА

Алгазин О. Д., Копаев А. В.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)
105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1, Российская Федерация

Аннотация
Цель: найти точные решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном многомерном слое с условиями сопряжения четвёртого рода.
Процедура и методы. В статье рассматривается задача Дирихле в кусочно-однородном слое в пространстве произвольной размерности. На внешних граничных гиперплоскостях заданы условия Дирихле, а на внутренней гиперплоскости, разделяющей слой на два слоя равной толщины, задаются условия сопряжения четвёртого рода. Заданные на границе функции считаются обобщёнными функциями медленного роста, в частности, они могут быть полиномами.
Результаты. Получены точные решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном многомерном слое с условиями сопряжения четвёртого рода, которые записываются в виде свёрток быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых функций (ядер) с граничными функциями, которые считаются обобщёнными функциями медленного роста. Если граничные функции являются обычными функциями медленного роста, то решения записываются интегральными формулами. В частности, если граничные функции являются полиномами, то решения также являются полиномами.
Теоретическая и/или практическая значимость исследования заключается в получении точных решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном многомерном слое с условиями сопряжения четвёртого рода.
Ключевые слова: Уравнение Лапласа, задача Дирихле, условия сопряжения четвёртого рода, обобщённые функции медленного роста.

DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION IN A PIECEWISE HOMOGENEOUS MULTIDIMENSIONAL LAYER WITH FOURTH-KIND CONJUGATION CONDITIONS

O. Algazin, A. Kopaev

Bauman Moscow State Technical University
ul. 2-ya Baumanskaya 5, stroenie 1, Moscow 105005, Russian Federation

Abstract
Aim. The purpose is to find exact solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a piecewise homogeneous multidimensional layer with fourth-kind conjugation conditions.
Methodology. We consider the Dirichlet problem in a piecewise homogeneous layer in a space of arbitrary dimension. Dirichlet conditions are set on the outer boundary hyperplanes, and conjugation conditions of the fourth kind are set on the inner hyperplane dividing the layer into two layers of equal thickness. The functions defined on the boundary are assumed to be generalized functions of slow growth; in particular, they can be polynomials.
Results. Exact solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a piecewise homogeneous multidimensional layer with conjugation conditions of the fourth kind are obtained, which are written as convolutions of rapidly decreasing, infinitely differentiable functions (kernels) with boundary functions, which are considered to be generalized functions of slow growth. If the boundary functions are ordinary functions of slow growth, then the solutions are written by integral formulae. In particular, if the boundary functions are polynomials, then the solutions are also polynomials.
Research implications. We have obtained exact solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a piecewise homogeneous multidimensional layer with conjugation conditions of the fourth kind.
Keywords: Laplace equation, Dirichlet problem, conjugation conditions of the fourth kind, generalized functions of slow growth

Введение

Краевые задачи с граничными условиями четвёртого рода возникают, например, при расчёте температуры в твёрдых телах, состоящих из нескольких различных материалов [1], задачах фильтрации в слоистых средах [2] и т. п. В [2] рассматривается плоская задача, а задача сопряжения гармонических функций трёх переменных краевыми условиями четвёртого рода решалась в [3] при построении фильтрационных течений в слоистой среде.

В данной статье мы рассматриваем задачу Дирихле в кусочно-однородном слое в пространстве произвольной размерности. На внешних граничных гиперплоскостях заданы условия Дирихле, а на внутренней гиперплоскости, разделяющей слой на два слоя равной толщины, заданы условия сопряжения четвёртого рода. Заданные на границе функции считаем обобщёнными функциями медленного роста [4], в частности они могут быть полиномами.

1.Постановка задачи

Найти функции $u(x,y), v(x,y),\ x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

$$\Delta u(x,y)=0, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \qquad 0<y<a, \tag{1}$$

$$\Delta v(x,y)=0, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \qquad a<y<2a, \tag{2}$$

$$u(x,0)=g(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

$$v(x,2a)=h(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$u(x,a)=v(x,a), \qquad u_y(x,a)=kv_y(x,a), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \qquad k>0. \tag{5}$$

Здесь $g(x)$ и $h(x)-$ заданные обобщённые функции медленного роста, $g(x),h(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [4].

Решение задачи будем искать в классе функций медленного роста по x:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx<C\ , \qquad |x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,, \tag{6}$$

для некоторого $m\geq 0$ и для каждого $y\in(0,a)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|v(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx<C\ ,$$

для некоторого $m\geq 0$ и для каждого $y\in(a,2a)$.

2.Решение задачи

Применяя преобразование Фурье по x [4] к (1) - (6) и, обозначая,

$$\mathcal{F}_x[u(x,y)](t,y)=U(t,y), \quad \mathcal{F}_x[v(x,y)](t,y)=V(t,y)\ ,$$

$$\mathcal{F}_x[g(x)](t)=G(t), \quad \mathcal{F}_x[h(x)](t)=H(t),$$

Получим ОДУ с параметром $t\in\mathbb{R}^n$

$$-|t|^2U(t,y)+U_{yy}(t,y)=0, \qquad 0<y<a \tag{7}$$

$$-|t|^2V(t,y)+V_{yy}(t,y)=0, \quad a<y<2a \tag{8}$$

и граничные условия

$$U(t,0)=G(t), \quad V(t,2a)=H(t), \tag{9}$$

$$U(t,a)=V(t,a), \ \ U_y(t,a)=kV_y(t,a). \tag{10}$$

Общие решения уравнений (7) и (8)

$$U(t,y)=\ C_1(t)e^{|t|y}+\ C_2(t)\,e^{-|t|y}, \qquad 0<y<a \tag{11}$$

$$V(t,y)=\ C_3(t)e^{|t|y}+\ C_4(t)\,e^{-|t|y}, \qquad a<y<2a \tag{12}$$

Используя граничные условия (9), (10), получим систему линейных уравнений для $C_1(t),\ C_2(t),\ C_3(t),\ C_4(t)$:

$$C_1(t)+\ C_2(t)=G(t) \tag{13}$$

$$C_3(t)e^{2a|t|} + C_4(t)\, e^{-2a|t|} = H(t) \qquad (14)$$

$$C_1(t)\, e^{a|t|} + C_2(t)\, e^{-a|t|} - C_3(t)\, e^{a|t|} - C_4\, e^{-a|t|} = 0 \qquad (15)$$

$$C_1(t)\, |t|\, e^{a|t|} - C_2(t)\, |t|\, e^{-a|t|} - C_3(t)\, k|t|\, e^{a|t|} + C_4(t)\, k|t|\, e^{-a|t|} = 0 \qquad (16)$$

Определитель этой системы

$$\Delta = 2(k+1)|t|\mathrm{sh}(2a|t|) \neq 0 \text{ для } t \neq 0,$$

поэтому система линейных уравнений (13)–(16) для значений параметра $t \neq 0$ имеет единственное решение. Подставляя это решение в (11), (12), получим

$$U(t,y) = G(t)\, \frac{\mathrm{sh}(|t|(2a-y))}{\mathrm{sh}(2a|t|)} +$$

$$+ \frac{1-k}{1+k}\, G(t)\, \frac{\mathrm{sh}(|t|y)}{\mathrm{sh}(2a|t|)} + \frac{2k}{1+k}\, H(t)\, \frac{\mathrm{sh}(|t|y)}{\mathrm{sh}(2a|t|)}, \quad 0 < y < a, \qquad (17)$$

$$V(t,y) = H(t)\frac{\mathrm{sh}(|t|y)}{\mathrm{sh}(2a|t|)} + \frac{k-1}{1+k}\, H(t)\frac{\mathrm{sh}(|t|(2a-y))}{\mathrm{sh}(2a|t|)} +$$

$$+ \frac{2}{1+k}G(t)\frac{\mathrm{sh}(|t|(2a-y))}{\mathrm{sh}(2a|t|)}, \qquad a < y < 2a. \qquad (18)$$

Поскольку функции

$$\frac{\mathrm{sh}(|t|y)}{\mathrm{sh}(2a|t|)} \text{ и } \frac{\mathrm{sh}(|t|(2a-y))}{\mathrm{sh}(2a|t|)}$$

имеют при $t = 0$ устранимую особенность, то, устраняя её, получим бесконечно дифференцируемые быстро убывающие функции от $t \in \mathbb{R}^n$, то есть функции из пространства основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. При этом (17), (18) дают единственное решение краевой задачи (7)–(10) для любого значения параметра $t \in \mathbb{R}^n$.

Применяя обратное преобразование Фурье, получим единственное решение задачи Дирихле (1)–(4) в классе функций медленного роста по x (6). Это решение записывается в виде свёртки:

$$u(x,y) = g(x) * l_n(x, 2a-y) +$$

$$+ \frac{1-k}{1+k}\, g(x) * l_n(x,y) + \frac{2k}{1+k}\, h(x) * l_n(x,y), \qquad (19)$$

$$v(x,y) = h(x) * l_n(x,y) +$$

$$+ \frac{k-1}{1+k}\, h(x) * l_n(x, 2a-y) + \frac{2}{1+k}\, g(x) * l_n(x, 2a-y), \qquad (20)$$

где «ядро»

$$l_n(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}\left[\frac{\mathrm{sh}(|t|y)}{\mathrm{sh}(2a|t|)}\right](x,y). \qquad (21)$$

Поскольку преобразование Фурье отображает взаимно-однозначно $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $l_n(x,y), l_n(x, 2a-y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ядро $l_n(x,y)$ при $y \to 2a-0$ является аппроксимативной единицей или дельтообразным семейством функций от x с параметром y [5]:

1) $l_n(x,y) > 0$,

2) $\int_{\mathbb{R}^n} l_n(x,y)\ dx = \dfrac{y}{2a} \to 1$ при $y \to 2a-0$,

3) для $\forall\delta > 0$, $\lim\limits_{y\to 2a-0} \sup\limits_{|x|\geq\delta} l_n(x,y) = 0$.

Эти свойства означают, что $l_n(x,y)$ слабо сходится к дельта-функции $\delta(x)$ при $y \to 2a-0$.

Аналогично, $l_n(2a-y)$ является аппроксимативной единицей при $y \to 0+$.

Поэтому, если $g(x)$ и $h(x)$ – обобщённые функции медленного роста, $g(x), h(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то граничные условия (3), (4) для $u(x,y)$и $v(x,y)$ выполняются в смысле теории обобщённых функций:

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = g(x) \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \qquad \lim_{y\to 2a-} v(x,y) = h(x) \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

то есть для каждой основной функции $\alpha(x) \in \mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$ имеют место равенства:

$$\lim_{y\to 0+} \langle u(x,y), \alpha(x)\rangle = \langle g(x), \alpha(x)\rangle,$$

$$\lim_{y\to 2a-} \langle v(x,y), \alpha(x)\rangle = \langle h(x), \alpha(x)\rangle.$$

Если $g(x), h(x)$ – обычные функции медленного роста, то граничные значения функций $u(x,y)$и $v(x,y)$ существуют в обычном смысле, то есть в каждой точке непрерывности функций $g(x)$ и $h(x)$ имеют место равенства

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = g(x), \qquad \lim_{y\to 2a-} v(x,y) = h(x).$$

Эти же равенства имеют место в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и в том случае, когда обобщённые функции $g(x)$ и $h(x)$ совпадают в этой области с непрерывными функциями.

Замечание. При $k = 1$ задача (1)–(4) переходит в задачу Дирихле для слоя, рассмотренную в [5].

Переходя в (21) к сферическим координатам и, обозначая $|x| = r$,

$|t| = \rho$, получим [5]:

$$l_n(x,y) = l_n^*(r,y)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} r^{n/2-1}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{sh}(2a\rho)} \rho^{n/2} J_{n/2-1}(r\rho) d\rho, \tag{22}$$

где $J_{n/2-1}(r\rho)$ – функция Бесселя 1-го рода порядка $\nu = n/2-1$.

Из формулы (22) получается рекуррентная формула

$$l_{n+2}^*(r,y) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r} l_n^*(r,y). \tag{23}$$

При $n = 1$ обратное преобразование Фурье (21) является элементарной функцией [5]:

$$l_1(x,y) = \frac{1}{4a}\,\frac{\sin(\pi y/2a)}{\mathrm{ch}(\pi x/2a) + \cos(\pi y/2a)},$$

$$l_1(x,2a-y) = \frac{1}{4a}\,\frac{\sin(\pi y/2a)}{\mathrm{ch}(\pi x/2a) - \cos(\pi y/2a)}.$$

Поэтому при нечётном n, то есть в пространствах $\mathbb{R}^{n+1}$ чётной размерности $l_n(x,y)$ выражается через элементарные функции с помощью рекуррентной формулы (23). Например,

$$l_3(x,y) = \frac{1}{16a^2}\,\frac{\sin(\pi y/2a)\,\mathrm{sh}(\pi|x|/2a)}{|x|(\mathrm{ch}(\pi|x|/2a) + \cos(\pi y/2a))^2},$$

$$l_3(x,2a-y) = \frac{1}{16a^2}\,\frac{\sin(\pi y/2a)\,\mathrm{sh}(\pi|x|/2a)}{|x|(\mathrm{ch}(\pi|x|/2a) - \cos(\pi y/2a))^2},$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,.$$

При $n = 2$, то есть в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$l_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}(\rho y)}{\mathrm{sh}(2a\rho)}\,\rho\, J_0(|x|\rho)d\rho, \tag{24}$$

не выражается через элементарные функции, а, следовательно, $l_n(x,y)$ не выражается через элементарные функции при чётном n, то есть в пространствах $\mathbb{R}^{n+1}$ нечётной размерности.

Ядро $l_2(x,y) = l_2(x_1,x_2,y)$ можно получить из $l_3(x,y) = l_3(x_1,x_2,x_3,y)$ «методом спуска», проинтегрировав $l_3(x,y)$ по x_3 от $-\infty$ до ∞,

$$l_2(x_1,x_2,y) = \int_{-\infty}^{\infty} l_3(x_1,x_2,x_3,y)\,dx_3.$$

Обозначая $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и, делая подстановку $\sqrt{r^2 + x_3^2} = t$, получим

$$l_2(x,y) = l_2^*(r,y) =$$

$$= \frac{\sin(\pi y/2a)}{8a^2}\int_r^\infty \frac{\mathrm{sh}(\pi t/2a)}{\sqrt{t^2 - r^2}\,(\mathrm{ch}(\pi t/2a) + \cos(\pi y/2a))^2}\,dt. \tag{25}$$

В отличие от формулы (24), подынтегральная функция в формуле (25) – монотонная, что сокращает время приближенного вычисления интеграла.

Ядро $l_2(x,y)$ можно записать в виде ряда, используя формулу из [7, с. 170]:

$$l_2(x,y) = l_2^*(r,y) =$$

$$= \frac{1}{4a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,n\cdot\sin\left(\frac{\pi n y}{2a}\right)K_0\left(\frac{\pi n r}{2a}\right), \tag{26}$$

где K_0 – функция Макдональда. Тогда

$$l_2(x, 2a - y) = l_2^*(r, 2a - y) =$$
$$= \frac{1}{4a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{2a}\right) K_0\left(\frac{\pi n r}{2a}\right). \qquad (27)$$

Если $g(x)$ и $h(x)$ – обычные функции медленного роста, то свёртки (19), (20) записываются интегралами. Например:

$$g(x) * l_1(x, y) = \frac{1}{4a} \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{\mathrm{ch}(\pi(x - t)/2a) + \cos(\pi y/2a)} dt,$$

$$h(x) * l_2(x, 2a - y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} h(t) dt \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(\rho(2a - y))}{\mathrm{sh}(2a\rho)} \rho J_0(\rho|x - t|) d\rho.$$

В частности, если $g(x)$ и $h(x)$ – полиномы, то свёртки (19), (20) также являются полиномами [6].

3.Примеры

Пример 1. $g(x) = g, h(x) = h -$ постоянные функции.

Решение получаем по формулам (19), (20).

$$u(x, y) = g(x) * l_n(x, 2a - y) +$$
$$+ \frac{1 - k}{1 + k} g(x) * l_n(x, y) + \frac{2k}{1 + k} h(x) * l_n(x, y) =$$
$$= g * l_n(x, 2a - y) +$$
$$+ \frac{1 - k}{1 + k} g * l_n(x, y) + \frac{2k}{1 + k} h * l_n(x, y) =$$
$$= g \int_{\mathbb{R}^n} l_n(x, 2a - y)\, dx + \frac{1 - k}{1 + k} g \int_{\mathbb{R}^n} l_n(x, y)\, dx +$$
$$+ \frac{2k}{1 + k} h \int_{\mathbb{R}^n} l_n(x, y)\, dx = g \cdot \frac{2a - y}{2a} + \frac{1 - k}{1 + k} \cdot g \cdot \frac{y}{2a} + \frac{2k}{1 + k} \cdot h \cdot \frac{y}{2a} =$$
$$= \frac{k(h - g)}{a(1 + k)} y + g,$$
$$v(x, y) = h * l_n(x, y) +$$
$$+ \frac{k - 1}{1 + k} h * l_n(x, 2a - y) + \frac{2}{1 + k} g * l_n(x, 2a - y) =$$
$$= h \cdot \frac{y}{2a} + \frac{k - 1}{k + 1} \cdot h \cdot \frac{2a - y}{2a} + \frac{2}{1 + k} \cdot g \cdot \frac{2a - y}{2a} == \frac{h - k}{a(1 + k)} y + \frac{hk + 2g - h}{1 + k}.$$

Это решение можно интерпретировать как установившуюся температуру стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, две половины которого имеют разные коэффициенты теплопроводности k_1 и k_2 ($k = k_2/k_1$), а концы стержня поддерживаются при постоянной температуре: левый конец стержня поддерживается при температуре g, а правый – при температуре h (см. рис. 1).

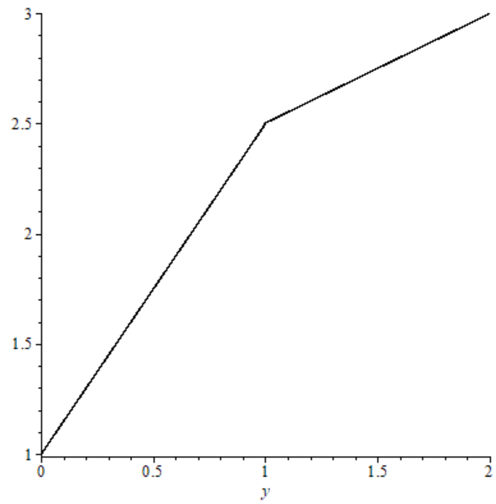

Рис. 1 / Fig. 1 Установившаяся температура в кусочно-однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью. Левый конец стержня поддерживается при температуре $g = 1$, а правый – при температуре $h = 3$, отношение коэффициентов теплопроводности $k = 3$ / Steady-state temperature in a piecewise homogeneous rod with a thermally insulated lateral surface. The left end of the rod is maintained at a temperature $g = 1$, and the right end is maintained at a temperature $h = 3$, and the ratio of thermal conductivity coefficients is $k = 3$

Источник: составлено авторами

Пример 2. $n = 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x) = \theta(x), h(x) = 0$.

Здесь $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Решение получаем по формулам (19), (20).

$$u(x,y) = g(x) * l_1(x, 2a - y) +$$

$$+ \frac{1-k}{1+k}\, g(x) * l_1(x,y) + \frac{2k}{1+k}\, h(x) * l_1(x,y) =$$

$$= \theta(x) * l_1(x, 2a - y) + \frac{1-k}{1+k}\, \theta(x) * l_1(x,y) =$$

$$= \frac{1}{4a} \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \int_0^\infty \frac{dt}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a) - \cos(\pi y/2a)} +$$

$$+ \left(\frac{1-k}{1+k}\right) \frac{1}{4a} \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \int_0^\infty \frac{dt}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a) + \cos(\pi y/2a)} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{y}{4a} + \frac{1}{\pi}\ \mathrm{arctg}\left(\mathrm{th}\left(\frac{\pi x}{4a}\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi y}{4a}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1-k}{1+k}\left(\frac{y}{4a} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\mathrm{th}\left(\frac{\pi x}{4a}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi y}{4a}\right)\right)\right), \qquad 0 < y < a,$$

$$v(x,y) = h(x) * l_1(x,y) +$$

$$+ \frac{k-1}{1+k}\ h(x) * l_1(x, 2a-y) + \frac{2}{1+k}\ g(x) * l_1(x, 2a-y) =$$

$$= \frac{2}{1+k}\ \theta(x) * l_1(x, 2a-y) =$$

$$= \frac{2}{1+k}\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{4a} + \frac{1}{\pi}\ \mathrm{arctg}\left(\mathrm{th}\left(\frac{\pi x}{4a}\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi y}{4a}\right)\right)\right), \ \ a < y < 2a.$$

Это решение можно интерпретировать как установившуюся температуру полосы с теплоизолированной боковой поверхностью, состоящей из двух полос равной ширины, которые имеют разные коэффициенты теплопроводности k_1 и k_2 ($k = k_2/k_1$), а нижняя и верхняя грани полосы поддерживаются при разной температуре: нижняя грань полосы поддерживается при температуре $g = \theta(x)$, а верхняя – при температуре $h = 0$ (см. рис. 2).

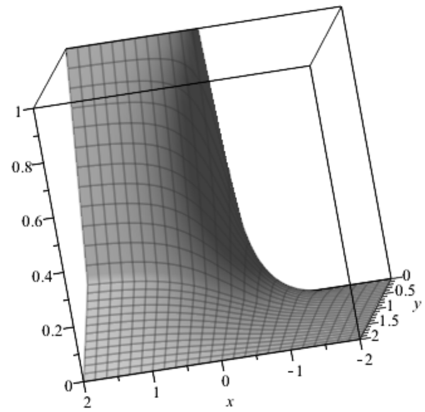

Рис. 2 / Fig. 2 Установившаяся температура в кусочно-однородной полосе с теплоизолированной боковой поверхностью. Нижняя грань полосы поддерживается при температуре $g = \theta(x)$, а верхняя – при температуре $h = 0$. Отношение коэффициентов теплопроводности $k = 3$ / Steady-state temperature in a piecewise homogeneous strip with a thermally insulated side surface. The lower edge of the strip is maintained at a temperature $g = \theta(x)$, and the upper one is maintained at a temperature $h = 0$. The ratio of thermal conductivity coefficients is $k = 3$

Источник: составлено авторами

Пример 3. $n = 2,\ (x, y) = (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3, g(x) = \delta(x), h(x) = 0.$
Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

$$u(x,y) = \delta(x) * l_2(x, 2a - y) + \frac{1-k}{1+k}\ \delta(x) * l_2(x,y) =$$

$$= l_2(x, 2a - y) + \frac{1-k}{1+k}\ l_2(x,y), \qquad 0 < y < a,$$

$$v(x,y) = \frac{2}{1+k}\ \delta(x) * l_2(x, 2a - y) = \frac{2}{1+k}\ l_2(x, 2a - y),$$

$$a < y < 2a.$$

Для вычисления $l_2(x,y)$ и $l_2(x, 2a - y)$ можно использовать формулы (24)–(27). Например, используя формулу (25), получим

$$u(x,y) = \frac{\sin(\pi y/2a)}{8a^2}\int_r^\infty \frac{\operatorname{sh}(\pi t/2a)}{\sqrt{t^2 - r^2}\,(\operatorname{ch}(\pi t/2a) - \cos(\pi y/2a))^2} dt +$$

$$+\frac{1-k}{1+k}\frac{\sin(\pi y/2a)}{8a^2}\int_r^\infty \frac{\operatorname{sh}(\pi t/2a)}{\sqrt{t^2 - r^2}\,(\operatorname{ch}(\pi t/2a) + \cos(\pi y/2a)\ +)^2} dt\,,$$

$$v(x,y) =$$

$$= \frac{2}{1+k}\frac{\sin(\pi y/2a)}{8a^2}\int_r^\infty \frac{\operatorname{sh}(\pi t/2a)}{\sqrt{t^2 - r^2}\,(\operatorname{ch}(\pi t/2a) - \cos(\pi y/2a))^2} dt.$$

Это решение можно интерпретировать как установившуюся температуру трёхмерного кусочно-однородного слоя, состоящего из двух слоёв равной толщины, которые имеют разные коэффициенты теплопроводности k_1 и k_2 ($k = k_2/k_1$). Верхняя граница слоя поддерживается при постоянной температуре $h = 0$, на нижней границе действует точечный источник тепла единичной мощности (см. рис. 3).

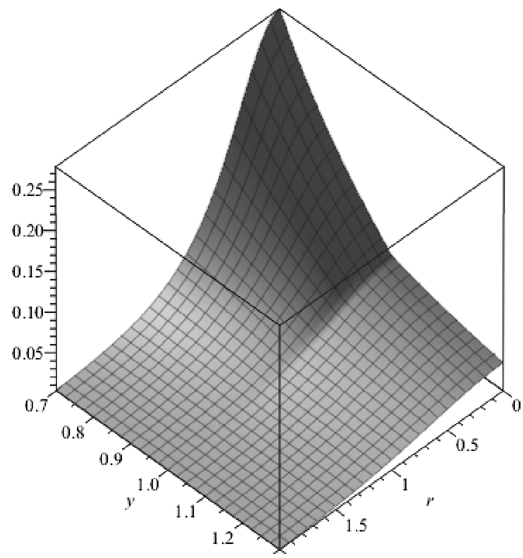

Рис. 3 / Fig. 3 Установившаяся температура в кусочно-однородном слое в его осевом сечении $0 < r < 2,\ 0.7 \leq y \leq 1.3$. Верхняя граница слоя поддерживаются при постоянной температуре $h = 0$, на нижней границе действует точечный источник тепла мощности $Q = 1$. Отношение коэффициентов теплопроводности $k = 3$ / Steady-state temperature in a piecewise homogeneous layer in its axial section $0 < r < 2,\ 0.7 \leq y \leq 1.3$. The upper boundary of the layer is maintained at a constant temperature $h = 0$, and at the lower boundary there is a point source of heat with power $Q = 1$. The ratio of thermal conductivity coefficients is $k = 3$

Источник: составлено авторами

Заключение

Получены точные решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном многомерном слое с условиями сопряжения четвёртого рода. В случае, когда заданные на границе слоя функции являются функциями медленного роста, решения задачи записываются интегральными формулами.

Статья поступила в редакцию 08.08.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков В. А. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
2. Радыгин В. М., Голубева О. В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. 160 с.
3. Копаев А. В. Метод функциональных уравнений в задачах фильтрации в слоистой среде // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 5. С. 81–89.

4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и математическое моделирование (сетевое издание МГТУ им. Н. Э. Баумана). 2015. № 4. С. 41–53. URL: https://www.mathmelpub.ru/jour/article/view/24/25 (дата обращения: 20.05.2022). DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943
6. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование (сетевое издание МГТУ им. Н. Э. Баумана). 2017. № 06. С. 1–18. URL: https://www.mathmelpub.ru/jour/article/view/82/88 (дата обращения: 20.05.2022). DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 2 Специальные функции. М.: Физматлит, 2003. 664 с.

REFERENCES

1. Lykov V. A. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p.
2. Radygin V. M., Golubeva O. V. *Primenenie funktsii kompleksnogo peremennogo v zadachakh fiziki i tekhniki* [Application of functions of a complex variable in problems of physics and technology]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1983. 160 p.
3. Kopayev A. V. [Functional equation method in problems of flow through a stratified porous medium]. In: *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1997, no. 5, pp. 81–89.
4. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
5. Algazin O. D., Kopayev A. V. [Solution of the Dirichlet Problem for the Poisson's Equation in a Multidimensional Infinite Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie (setevoe izdanie MGTU im. N. E. Baumana)* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2015, no. 4, pp. 41–53. Available at: https://www.mathmelpub.ru/jour/article/view/24/25 (accessed: 20.05.2022). DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
6. Algazin O. D. [Polynomial Solutions of the Boundary Value Problems for the Poisson Equation in a Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie (setevoe izdaniye MGTU im. N. E. Baumana)* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017. no. 6, pp. 1–18. Available at: https://www.mathmelpub.ru/jour/article/view/82/88 (accessed: 20.05.2022). DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082.
7. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. T. 2 Spetsial'nye funktsii* [Integrals and Series. Vol. 2 Special functions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 664 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: mopi66@yandex.ru;

Копаев Анатолий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: kopaev50@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg D. Algazin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru;

Anatoliy V. Kopaev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: kopaev50@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д., Копаев А. В. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном многомерном слое с условиями сопряжения четвёртого рода // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 3. С. 87-99.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-3-59-87-99

FOR CITATION

Algazin O. D., Kopaev A. V. Dirichlet problem for the Laplace equation in a piecewise homogeneous multidimensional layer with fourth-kind conjugation conditions. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2022, no. 3, pp. 87-99.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-3-59-87-99