УДК 37.016:51

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ MATHEMATICA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ КАК ФАКТОР ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Ю.М. Горшкова

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио. 10А

Аннотация: На примере двух задач демонстрируется применение компьютерной системы Mathematica на занятиях по геометрии, демонстрируются возможности развития пространственного восприятия. Эти два момента представляются важным фактором повышения педагогической компетентности будущих учителей математики.

Ключевые слова: геометрия, компьютер, система Mathematica, пространственное восприятие.

Проблема повышения педагогической компетентности будущих учителей математики по-прежнему актуальна. Современные условия предоставляют для этого такой мощный инструмент, каким является персональный компьютер и соответствующая система программирования, в частности Mathematica. Эта система вполне может быть рекомендована для применения на занятиях по геометрии. Помимо быстроты получения результата система позволяет решать такие задачи и наглядно представлять решения, которые способствуют развитию пространственных представлений.

Во-первых, компьютерная система Mathematica является весьма мощной и агрегированной. Она обладает широкими вычислительными возможностями. Кроме того, система Mathematica содержит множество специальных графических пакетов.

Во-вторых, компьютерная система Mathematica написана на языке Си++, который по сравнению с другими языками обладает существенными преимуществами [1].

В-третьих, многие задачи в системе Mathematica можно решать без знания языков программирования. При этом для обращения с системой Mathematica, необходимы только общие навыки владения компьютером.

Пакет Mathematica можно использовать при решении широкого круга задач, которые могут быть самыми разнообразными: простыми и элементарными, сложными.

Простые геометрические задачи (на вычисление площади или периметра многоугольников, на вычисление радиуса или диаметра окружности, и многие другие) в пакете Mathematica вычисляются мгновенно.

Но существуют и более сложные задачи. Решения таких задач, по геометрии, вручную могут содержать трудоёмкие вычисления. В системе Mathematica решение таких задач становится мобильным и интересным. Правда при этом следует составить только алгоритм их решения, что имеет свои положительные моменты.

Примеры решения некоторых задач рассмотрены в [2]. В этой статье мы демонстрируется решение конкурсной технической задачи по геометрии с применением Mathematica: «Вычисление радиуса круга по заданным n отрезкам – сторонам n-угольника, который должен быть вписан в окружность» [3] (рис.1).

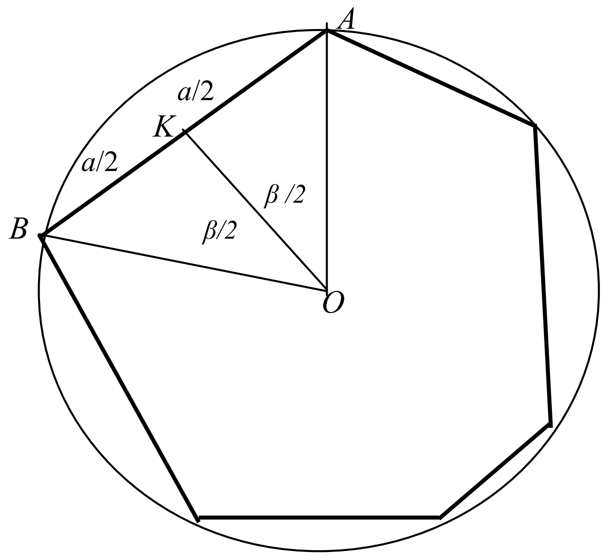


Рис.1. Вписанный неправильный n-угольник.

1. Рассмотрим вписанный в окружность радиуса r неправильный многоугольник со сторонами $a_1, a_2, \ldots a_n$.
2. Рассмотрим произвольный сектор AOB. Соответствующий этому сектору треугольник AOB является, очевидно, равнобедренным.
3. Пусть $\angle AOB = \beta_1$. Из вершины O равнобедренного треугольника AOB проведем высоту OK. Тогда $KB = KA = \dfrac{a_1}{2}$ и $\angle KOB = \angle KOA = \dfrac{\beta_1}{2}$.
4. В прямоугольном треугольнике KOB:

$$\sin\frac{\beta_1}{2} = \frac{a_1}{2r}, \qquad \angle AOB = \beta_1 = 2\times\arcsin\frac{a_1}{2r} \ .$$

Аналогично находятся остальные углы при вершине O, которые могут быть образованы радиусами, проведенными из центра окружности к вершинам n –угольника. Всего таких углов n. Так как вершины n–угольника лежат на окружности, то:

$$\beta_i = 2\times\arcsin\frac{a_i}{2r}, \qquad i = 1,\ldots,n \ .$$

5. Сумма всех углов n–угольника при вершине O равна:

$$\beta_1+\beta_2+...+\beta_n = 2\times\arcsin\frac{a_1}{2r}+2\times\arcsin\frac{a_2}{2r}+...+2\times\arcsin\frac{a_n}{2r}=2\times\pi \ ,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\arcsin\frac{a_i}{2r}=\pi \ .$$

Найти значение радиуса из последнего соотношения весьма сложно. Средства пакета Mathematica такую возможность предоставляют.

Для этого надо ввести, в свободном окне Mathematica произвольный набор **aa={}** длин сторон некоторого многоугольника, например,

aa={1,2,1,1.5,1,1,1,1.5};

Далее каждую сторону многоугольника вписанного в окружность, из максимального набора **aa**, делим пополам. Обозначим эту команду **mm**. При этом используем оператор присваивания «=»:

mm=Max[aa]/2;

Используя случайную величину Random, которая позволяет вычислять радиус окружности для любого набора **aa** значений длин сторон, которые отличаются от данных на 0,1.

bb=Table[Random[],{i,Length[aa]}];
t=0.1

покажем, что заданные значения длин сторон увеличиваются на 0.1:

aa=aa+t*bb;

Введём, составленное в процессе решения задачи, равенство для вычисления радиуса окружности:

f[r_]:=Sum[ArcSin[aa[[i]]/(2r)],{i,Length[aa]}];

Поскольку длина радиуса может иметь разное значение, используем символ подчеркивания «_». Заметим, что программа «работает» с каждым элементом aa[[i]] из всего Length[aa] списка значений сторон aa.

Поясним наглядно решение такого равенства. Для этого введём команду:

Plot[{f[r],Pi},{r,mm+0.2,5}];

Первым аргументом функции Plot необходимо указать функции f[r] и прямой y=π. Полученная точка их пересечения и будет значение искомого радиуса (Рис.2). Второй аргумент – область изменения значений радиуса и длин сторон.
Чтобы получить точное значение радиуса**,** применяем метод «половинного деления», который заключается в следующем: выбираем на оси абсцисс в окрестности искомой точки отрезок и делим его пополам. Вычисляет значение функции f[r_] на концах этого отрезка и в середине. При этом искомое значение должно быть слева от середины выбранного отрезка больше π, а справа – меньше π. Таким образом, мы постепенно делим отрезок. В результате выбор искомого значения сужается.

В системе Mathematica этот процесс можно осуществить следующим способом. Вводим обозначения:

a=mm;b=Length[aa]*mm*2;

Затем применяем метод «половинного деления», который вводим с помощью условного оператора «If» («если») и команды «Do» («делаем»).

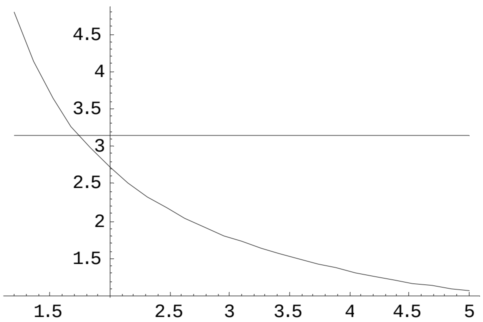
Do[If[f[(a+b)/2]<Pi,b=(a+b)/2,a=(a+b)/2];

Поясняем, что выбираем некоторый отрезок вблизи искомого значения радиуса. При этом этот участок согласно методу «половинного деления», делим пополам:

r=(a+b)/2;

Вводим команду «Print» («напечатать») для вывода результата на экран компьютера. Для этой цели используем команду «Print[]».

Print["r=",N[r]];



r= 1.73912

Рис.2. Метод половинного деления в системе Mathematica.

Пакет Mathematica может быть полезен не только своими вычислительными, но и графическими возможностями. В геометрии для построений различных геометрических фигур в основном применяется мел и доска. При этом изображение фигуры является плоским. С помощью системы Mathematica [4] можно изобразить многие геометрические объекты, как на плоскости, так и в пространстве.

Эта возможность демонстрируется на примере построения икосаэдра.

1. В свободной области окна системы Mathematica вводится команда «<<Graphics`Polyhedra`», которая позволяет подключить пакет «Polyhedra». Ввод этой команды следует обязательно начать со знака «<<». При этом слева от введённой команды, системой автоматически присваивается номер команды In[1], In[2]. Кроме того, название пакета, который будет использоваться для построения многогранников, следует вводить в «`   `».

   In[1]:= <<Graphics`Polyhedra`

2. Укажем, что строим икосаэдр остроконечный, а значит звёздообразный. Для этого используем оператор присваивания «=». Остроконечный вводится как «spiky»,

«Stellate» - звёздообразный. В квадратных скобках укажем, что строим икосаэдр из набора многогранников, которые хранятся в памяти системы Mathematica. При этом название самого многогранника также укажем в квадратных скобках.

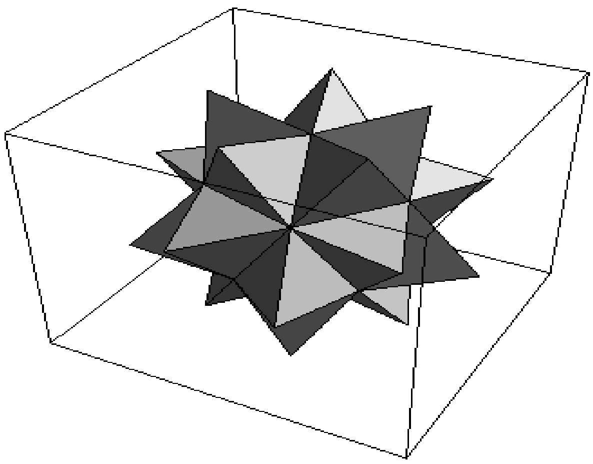
spiky=Stellate[Polyhedron[Icosahedron]]

3. Для отображения остроконечного и звёздчатого икосаэдра на экран в Mathematica необходимо ввести команду «Show[]». В скобках следует указать введённую ранее команду с заданным видом икосаэдра (Рис.3).

In[2]:= Show[spiky]

4. После ввода последней команды нажимаем «Enter» (на персональном компьютере) или комбинацию «Shift+Enter» (на ноутбуке) и получаем икосаэдр. При этом слева от результата построенного икосаэдра автоматически указывается ключевое слово с номером выполненной команды: Out[2].

Out[2]:=



-Graphics3D-

Рис. 3. Икосаэдр, построенный в Mathematica.

В Mathematica [4] для построений геометрических фигур можно применять анимацию. При этом фигуры «оживают» и могут вращаться. Тогда появляются следующие возможности: наглядно анализировать многие геометрические объекты в пространстве; выделять определённые свойства геометрических фигур. Использование графических пакетов в компьютерной системе Mathematica позволит расширить возможности наглядного представления геометрического материала. Например, с помощью графических возможностей пакета Mathematica можно продемонстрировать: полуправильные многогранники (тела Архимеда), звёздчатые многогранники (тела Кеплера-Пуансо). При этом удобно рассмотреть их классификацию.

Система Mathematica имеет широкие возможности, которые могут способствовать появлению новых задач. Таким образом, универсальная компьютерная система Mathematica может весьма расширить представления в области геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свердлов, С.З. Языки программирования и методы трансляции [Текст]. - Питер, 2007. - 637 с.
2. Горшкова, Ю.М. Вычисление объёмов многогранников с данным комбинаторным строением и длинами рёбер [Текст]. // Симметрии: теоретический и методический аспекты: Сборник научных трудов 3 Международного симпозиума – Астрахань: Изд-во ОГОУ ДПО «АИПКП», 2009.- 18-22 с.
3. Садчиков, В.А. Во славу лет, не прожитых напрасно. О профессоре И.К. Андронове, талантливом педагоге, учёном, просветителе [Текст]. – М.: ПЕР СЭ, 2009. – 214 с.
4. Васильев, А.Н. Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач [Текст]. – К.: ВЕК+, СПб.: КОРОНА – ВЕК. – 448 с.

APPLICATION OF COMPUTER SYSTEM MATHEMATICA AT STUDY OF GEOMETRY AS THE FACTOR OF INCREASE PEDAGOGICAL COMPETENCE THE FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS

J. Gorshkova

Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. On an example of two tasks the application of computer system Mathematica on employment on geometry is demonstrated, the opportunities of development of spatial perception are demonstrated. These two moments are represented by the important factor of increase of pedagogical competence of the future teachers of mathematics.

Key words: geometry, computer, system Mathematica, spatial perception.