

МАТЕМАТИКА

УДК 517.572

ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ, ГАРМОНИЧЕСКОЙ В ШАРЕ

О.Э. Яремко, Ю.А. Парфёнова

Пензенский государственный педагогический университет
имени В.Г. Белинского
440026, Пенза, ул. Лермонтова, 37

Аннотация. Проблема аналитического продолжения и задача Коши для уравнений эллиптического типа, т.н. пример Адамара, оказались важными задачами в геофизике в связи с вопросами продолжения потенциальных полей. Баврин И.И. предложил формулы, восстанавливающие аналитическую или гармоническую функцию по её значениям на внутренней окружности для областей с круговой симметрией из E^2 . В статье найдено аналитическое решение задачи продолжения гармонической в единичном N -мерном шаре функции по её известным значениям на внутренней сфере. Получено также решение аналогичной задачи продолжения в случае задания на сфере не самой функции, а некоторых её операторных выражений.

Ключевые слова: гармоническая функция, задача продолжения.

Первые работы М.М. Лаврентьева связаны с задачами аналитического продолжения и задачей Коши для уравнений эллиптического типа. Созданный им метод получения оценок условной устойчивости решений этих задач открыл путь дальнейших широких исследований в этой области. Задача Коши для уравнения Лапласа - классический пример Адамара некорректной задачи - оказалась важной задачей в геофизике в связи с вопросами продолжения потенциальных полей [3, 58]. В данной работе предлагается аналитическое решение одной из задач продолжения потенциала для шара.

Ранее для областей с круговой симметрией из E^2 И.И. Баврин предложил формулы, восстанавливающие аналитическую или гармоническую функцию по её значениям на внутренней окружности [1; 2, 68]. В настоящей статье результаты переносятся на случай функции, гармонической в единичном шаре из $E^N, N \geq 3$.

Формула Пуассона для точек $x = (x_1, \dots, x_N) \in B_R$, N - мерного шара из E^N радиуса R имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N R} \int_{S_R} \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2Rr \cos \psi + r^2)^{\frac{N}{2}}} u(y) dS_R(y), \quad (1)$$

где

$$r = |x|, \quad |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_N^2, \quad \cos \psi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|},$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N, \quad \sigma_N = \frac{N \pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)}$$

σ_N - площадь единичной сферы в E^N , а $dS_R(y)$ - элемент площади сферы S_R , $S_R(y) = \{y : |y|^2 = R^2\}$, $\Gamma = \Gamma(x)$ - гамма функция.

Для ядра Пуассона в единичном шаре из E^N , $N \geq 3$ справедливо разложение в ряд по полиномам Гегенбауэра $T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi)$ порядка $\frac{N-3}{2}$ [4, 80]:

$$\frac{1-r^2}{(1-2r \cos \psi + r^2)^{\frac{N}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{N-2}{2} \right) r^n T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi). \quad (2)$$

Приведем две формулы (3) и (4), дающие новые выражения для ядра Пуассона:

$$\frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{1-r^2}{(1-2r \cos \psi + r^2)^{\frac{N}{2}}} = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{N-2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{N-3+n}}{(N-3+n)!} r^n \cdot T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) d\varepsilon \quad (3)$$

Формула (3) получается почленным интегрированием правой части с использованием разложения (2) для ядра Пуассона.

Формула (4) может быть получена использованием таблиц преобразований Лапласа и проведением некоторых элементарных выкладок:

$$\frac{2^{\frac{N-3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \frac{1-r^2}{(1-2r \cos \psi + r^2)^{N/2}} = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{N-2}{2} \right) e^{r\varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}(r\varepsilon \sin \psi)}{(r \sin \psi)^{\frac{N-3}{2}}} d\varepsilon, \quad (4)$$

здесь $J_{\frac{N-3}{2}}(t)$ -цилиндрическая функция Бесселя первого рода [4, 161].

Лемма 1. Для всех значений $0 < r < 1$, $\varepsilon > 0$ справедливо тождество:

$$e^{r\varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}(r\varepsilon \sin \psi)}{(r \sin \psi)^{\frac{N-3}{2}}} = 2^{\frac{N-3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{N-3+n}}{(N-3+n)!} r^n T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi). \quad (5)$$

Доказательство. Заметим, что изображения Лапласа обеих частей равенства (5) одинаковы. Ввиду единственности изображения Лапласа из формул (3),(4) следует тождество (5).

Лемма 2. Пусть функция $\omega = \omega(t)$ определена на отрезке $[0,1]$, неотрицательна и непрерывна на $[0,1]$. Если

$$\int_0^1 \varepsilon^n \omega(\varepsilon) d\varepsilon = c_n, \quad \text{и} \quad \Omega(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\tau} \omega(\tau) d\tau$$

то

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = n! c_n.$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что в повторном интеграле

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \left(\int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\tau} \omega(\tau) d\tau \right) d\varepsilon$$

можно изменить порядок интегралов. В результате, получим:

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} \left(\int_0^\infty \varepsilon^n e^{-\varepsilon\tau} d\varepsilon \right) d\tau = \int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} n! \tau^{n+1} d\tau = n! c_n.$$

Лемма доказана.

Замечание. Лемма 2 означает, что решение проблемы моментов на промежутке $[0, \infty)$ выражается через решение некоторой проблемы моментов на отрезке $[0,1]$.

Приведем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть функция $u = u(x)$ гармоническая в единичном шаре $B_1, B_1 \subset E^N$ и непрерывна на $\bar{B}_1$, тогда справедлива формула:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{N-2}{2} \right) \cdot \left(\int_{S_R} e^{r/R \cdot \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}(r/R \cdot \varepsilon \sin \psi)}{(r/R \cdot \sin \psi)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right) d\varepsilon, \quad x \in B. \quad (6)$$

Доказательство. Примем обозначение

$$u_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^k e^{-\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{N-2}{2} \right) \left(\int_{S_R} e^{r/R \cdot \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}(r/R \cdot \varepsilon \sin \psi)}{(r/R \cdot \sin \psi)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right) d\varepsilon$$

В правой части последней формулы изменим порядок интегрирования и применим тождество (5). В результате, после интегрирования по ε , для функции $u_k(x)$ получим выражение:

$$u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N R^{N-1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{N+2}{2} \right) \left(\frac{\int_0^k e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-3+n} d\varepsilon}{(N-3+n)!} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^n \int_{S_R} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_R(y); x \in B_R. \quad (7)$$

Учитывая единственность разложения гармонической в единичном шаре B функции $u(x)$ в ряд однородных гармонических полиномов замечаем, что каждый из интегралов

$$\frac{1}{R^{n+N-1}} \int_{S_R} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_R(y)$$

не зависит от R . В частности, в формуле (7) можно принять $R=1$. Тогда:

$$u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{N+2}{2} \right) \left(\frac{\int_0^k e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-3+n} d\varepsilon}{(N-3+n)!} \right) r^n \int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_1(y).$$

Неравенство

$$\frac{\int_0^k e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-3+n} d\varepsilon}{(N-3+n)!} \leq 1, \quad k \in (0, \infty)$$

позволяет выполнить предельный переход при $k \rightarrow \infty$ в ряде, изображающем функцию $u_k(x)$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{N+2}{2} \right) r^n \int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_1(y).$$

На основании формулы (2) правую часть в последней формуле можно переписать в виде:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_{S_1} \frac{1^2 - r^2}{(1^2 - 2r \cos \psi + r^2)^{\frac{N}{2}}} u(y) dS_1(y).$$

Формула Пуассона (1) приводит к окончательному результату:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u(x), \quad x \in B$$

Замечание. В случае двух переменных $N=2$, формула аналогичная (6), доказана И.И. Бавриным в работе [2, 68].

Представим обобщение интегральной формулы (6). Пусть l - натуральное число и $\beta_1, \dots, \beta_l$ - любые действительные числа с условием $\beta_j \geq 1, j = 1, \dots, l$. В работе Баврина И.И. [2, 68] введены операторы, действующие на функции, гармонические в единичном шаре B_1 :

$$L_{\beta_j} [u] = \beta_j u + \sum_{i=1}^N x_i u'_{x_i}, \quad j = 1, \dots, l;$$

$$L_a^{(l)} [u] = L_{\beta_l} \dots L_{\beta_1} [u].$$

Оператор, обратный к оператору L_{β_j} , определяется формулой:

$$L_{\beta_j}^{(-1)} [u] = \int_0^1 \varepsilon^{\beta_j-1} u(\varepsilon x) d\varepsilon, \quad \varepsilon x = (\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_N).$$

Следовательно, оператор обратный к $L_a^{(l)}$, обозначаемый в дальнейшем $L_a^{(-l)}$, имеет вид:

$$L_a^{(-l)} [f] = L_{\beta_1}^{(-1)} \dots L_{\beta_l}^{(-1)} [f].$$

Рассмотрим также оператор $L_{ad\%}^{(l, -\frac{p\%}{\%})} [u] = L_{\%}^{(-\frac{p\%}{\%})} L_a^{(l)} [u]$, см.[2], обратный для которого имеет вид:

$$L_{ad\%}^{(-l, \frac{p\%}{\%})} [u] = L_a^{(-l)} L_{\%}^{(\frac{p\%}{\%})} [u].$$

Определим серию операторов, действующих на функцию $\Phi(\varepsilon), \varepsilon > 0$.

$$\Lambda_{\beta_j} [\Phi] = (\beta_j - 1) \Phi - \varepsilon \Phi'_{\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, l,$$

а также операторов, обратных к ним

$$\Lambda_{\beta_j}^{-1} [\Phi] = \int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon \tau}}{\tau} \Phi(\tau) d\tau, \quad j = 1, \dots, l.$$

Определим также оператор

$$\Lambda_a^{(l)} [\Phi] = \Lambda_{\beta_l} \dots \Lambda_{\beta_1} [\Phi].$$

Следовательно, оператор обратный к $\Lambda_a^{(l)}$, обозначаемый в дальнейшем $\Lambda_a^{(-l)}$, имеет вид:

$$\Lambda_a^{(-l)}[\Phi] = \Lambda_{\beta_1}^{(-1)} \dots \Lambda_{\beta_l}^{(-1)}[\Phi].$$

Рассмотрим также оператор $\Lambda_{a\partial^0}^{(l,-p_0)}[\Phi] = \Lambda_{\partial^0}^{(-p_0)}\Lambda_a^{(l)}[\Phi]$, обратный для которого имеет вид:

$$\Lambda_{a\partial^0}^{(-l,l_0)}[\Phi] = \Lambda_a^{(-l)}\Lambda_{\partial^0}^{(l_0)}[\Phi].$$

Теорема 2. Пусть функция $u = u(x)$ – гармоническая в единичном шаре B_1 из E^N и непрерывна на $\bar{B}_1$, тогда справедливо интегральное представление:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Lambda_{a\partial^0}^{(-l,l_0)}[\Phi(\varepsilon)] \times \\ \times \left(\int_{S_R} e^{r/R \cdot \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}(r/R \cdot \varepsilon \sin \psi)}{(r/R \cdot \sin \psi)^{\frac{N-3}{2}}} L_{a\partial^0}^{(l,-l_0)}[u(y)] dS_R(y) \right) d\varepsilon, \quad x \in B$$

где

$$\Phi(\varepsilon) = e^{-\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{N-2}{2} \right).$$

Доказательство. Так как любые два оператора L_{β_i} и $L_{\beta_j}^{-1}$ коммутируют, то достаточно изучить два основных случая (а) и (б).

а) $L_{a\partial^0}^{(l,-p_0)} = L_\beta^{-1}$. По основному свойству оператора L_β^{-1} для любого однородного гармонического многочлена степени n выполнено: $L_\beta^{-1}[P_n(x)] = \frac{1}{\beta+n} P_n(x)$. Получим равенство:

$$\int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) L_\beta^{-1}[u(y)] dS_1(y) = \frac{1}{\beta+n} \int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_1(y).$$

Интегрирование по частям приводит к равенству:

$$\int_0^\infty \Lambda_\beta[\Phi(\varepsilon)] \varepsilon^n d\varepsilon = (\beta+n) \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \varepsilon^n d\varepsilon.$$

б) $L_{ad}^{(l,-P)} = L_\beta$. По основному свойству оператора L_β для любого однородного гармонического многочлена степени n выполнено:

$$L_\beta [P_n(x)] = (\beta + n) P_n(x).$$

Тогда справедливо равенство:

$$\int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) L_\beta [u(y)] dS_1(y) = (\beta + n) \int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_1(y).$$

Осталось применить лемму 1, в которой положено $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^{\beta-1}$, тогда

$$\int_0^\infty \Lambda_\beta^{-1} [\Phi(\varepsilon)] \varepsilon^n d\varepsilon = \frac{1}{\beta + n} \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \varepsilon^n d\varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин, И.И. Обратная задача для интегральной формулы Коши в кольце [Текст]. – Доклады РАН, 2009. Т.428 №2 – С. 151-152.
2. Баврин, И.И. Операторный метод в комплексном анализе [Текст]. – М.: Прометей, 1991. – 200с.
3. Лаврентьев, М.М.; Романов, В.Г.; Васильев, Г.В. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений [Текст]. – Новосибирск.: Наука, 1967.
4. Никифоров, А.Ф.; Уваров, В.Б. Специальные функции математической физики – 2 изд [Текст]. – М.: 1984.

CONTINUATION PROBLEM FOR HARMONIC FUNCTION IN THE BALL

O. Yaremko, Y. Parfenova

*Penza State Pedagogical University
37, Lermontov str., 44026, Penza*

Abstract. The analytical continuation problem and Cauchy problem for the elliptic equations, a so-called Adamar example, have appeared important problems in geophysics in connection with questions of potential fields continuation. Bavrin I.I. has offered the formulas restoring analytical or harmonious function on its values on an internal circle for areas with circular symmetry of E^2 . The analytical decision of a problem of harmonious function continuation in an individual-dimensional sphere on its known values on internal sphere is found. The decision of a similar continuation problem in case of the task on sphere not the function, and its some operational transformations is received.

Key words: harmonic function, continuation problem.