

О СТАБИЛИЗАЦИИ СЕТОЧНОГО МЕТОДА БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ВЫСОКИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Н.М. Евстигнеев

Институт системного анализа РАН, Москва

Аннотация. В работе рассматривается стабилизация сеточного метода Больцмана при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности (исчезающе малой вязкости). Анализируется поведение алгоритма и устойчивость различных шагов метода расщепления для алгоритма stream and collide. Вводится локальное ограничение на отклонение энтропии функции распределения частицы от равновесного состояния. Ограничитель аналогичен применению метода TVD в классической вычислительной гидродинамике. Проводится анализ получаемых решений на модельной двумерной геометрии класса D2Q9. Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (гранты 08-07-00074а и 09-07-00078а).

Ключевые слова: сеточный метод Больцмана, численное моделирование в гидродинамике, турбулентное течение.

1. Введение.

В настоящее время объем публикаций, связанный с работами по сеточному методу Больцмана (СМБ) значительно увеличился в связи с относительной простотой реализации кода и отличным потенциалом для распараллеливания начально-краевых задач. Основным недостатком СМБ является потеря устойчивости решения при моделировании турбулентных потоков (число Рейнольдса $R \rightarrow \infty$) с малой вязкостью. Для предотвращения данного недостатка в основном либо вводят искусственную схемную вязкость, которая значительно демпфирует и “размазывает” решение при $R \rightarrow \infty$ [1] либо применяют итерационные подходы, которые значительно замедляют процесс решения и лишают СМБ привлекательности, связанной с локальностью функций распределения [2]. Представляется важным проанализировать основу потери устойчивости метода и изменить сам метод, не теряя в вычислительной производительности алгоритма и локальности функции распределения.

2. Исходные уравнения Больцмана.

Пусть задана вероятностная функция распределения одной частицы (PPDF) $f(r, e, t)$, такая, что выражение $[f(r, e, t) \cdot d^3 r \cdot d^3 e]$ представляет собой количество частиц в момент времени t внутри фазового объема $[d^3 r \cdot d^3 e]$ в окрестности r и e , где r – координаты в физическом пространстве, e – скорость частицы. Тогда эволюция PPDF будет описываться уравнением вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e \cdot \nabla_r + a \cdot \nabla_e \right) f(r, e, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}, \quad (1)$$

где a – внешняя сила, действующая на частицу, $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ – член уравнения, отвечающий за соударения частиц.

Уравнение (1) переводится к форме, введенной Больцманом, если в (1) ввести следующие предположения: 1) Рассматриваются только бинарные соударения (т.е. среда достаточно разрежена). 2) Скорость частицы не связана с ее местоположением (предположение молекулярного хаоса). 3) Пристеночные эффекты не влияют на соударение. 4) Внешние силы a не влияют на интеграл дифференциального сечения соударения.

3. Вывод уравнения Больцмана с ВГК оператором соударения. Гидродинамическое приближение.

Если система находится в околоравновесном положении, то интеграл $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ может быть значительно упрощен. В соответствии с теорией интервальных соударений [3] можно сказать, что за временной интервал δt часть частиц, определяемая как $\delta t / \tau = 1 / \tau^*$ (τ – время релаксации), в заданном малом объеме подвергаются соударениям и при этом их PPDF f переходят в равновесное состояние $f^{(0)}$, определяемое распределением Максвелла:

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D_0/2}} \exp\left[-\frac{(e-U)^2}{2RT}\right]. \quad (2)$$

Здесь D_0 , R , T , ρ , U – размерность пространства, универсальная газовая постоянная, температура, макроскопические плотность и скорость. Введя (2), интеграл соударения можно переписать в приближении Бхатнагара-Гросса-Крука (ВГК) как:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau} = -\frac{f - f^{(0)}}{\delta t \cdot \tau^*}. \quad (3)$$

Для выражения силового взаимодействия вводится предположение, что $\nabla_e f \approx \nabla_e f^{(0)}$ и тогда (1) переписывается как:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e \cdot \nabla_r f = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau} + \frac{a \cdot (e - U)}{RT} f^{(0)}. \quad (4)$$

Связь между микроскопической характеристикой частицы (PPDF) и макроскопическими характеристиками среды в случае гидродинамического приближения выполняется путем интегрирования f по фазовому объему, на пример:

$$\rho = \int [f] de; \quad \rho U = \int [f \cdot e] de; \quad \rho \varepsilon = 0.5 \int [(e - U)^2 f] de. \quad (5)$$

Рассматривая процесс эволюции (4) при малом числе Кнудсена:

$$\varepsilon = \lambda / L \leq 0.1, \quad (6)$$

и малых значениях скорости при постоянной температуре (малое число Маха) можно применить разложение Чапмена-Энскога [4] переписав (2) как:

$$f^{(0)} = \frac{\rho \cdot \exp\left[-\frac{(e-U)^2}{2RT}\right]}{(2\pi RT)^{D_0/2}} \cdot \left(1 + \frac{e \cdot U}{RT} + \frac{(e \cdot U)^2}{2(RT)^2} - \frac{U^2}{2RT}\right) + O(U^3), \quad (7)$$

И применив (4) можно получить следующее гидродинамическое приближение для нулевых и первых моментов разложения для PPDF по числу Кнудсена:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0; \quad \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + (U \cdot \nabla)\rho U + \nabla(\rho RT) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \eta \frac{2}{3} \nabla \cdot U \right), \quad (8)$$

где $\eta = \varepsilon \rho RT$ - аналог динамической вязкости. Очевидно, что при определенном выборе R·T уравнения (8) переходят в уравнения Навье-Стокса для слабосжимаемой жидкости с уравнением состояния вида $P = \rho RT$, что при введенных предположениях о постоянной температуре приведет к модельным уравнениям искусственной сжимаемости, аналогичным модели Черина.

4. Уравнения и алгоритм сеточного метода Больцмана.

Одним из эффективных методов решения (4) является применение дискретных клеточных автоматов, подобно моделям упрощенной микродинамики текучих сред [6]. Исторически “классический” Сеточный Метод Больцмана стал эмпирическим продолжением идеи молекулярных газовых автоматов [6], но в отличие от последних использует прямоугольные сетки. Здесь не останавливаемся на реализации алгоритма, более детально с.м. [4]. Аппроксимация (4) на сеточном шаблоне записывается так, чтобы тождественно выполнялись интегралы (5). Не останавливаясь детально на методе дискретизации, запишем уравнение переноса и соударения сеточного метода Больцмана для ячейки геометрии D2Q9, для классификации ячеек и процедуры построения дискретизации с.м. [2,4]:

$$\frac{\partial f_q}{\partial t} + e_q \cdot \nabla_x f_q = -\frac{f_q - f_q^{(0)}}{\tau} + \frac{a \cdot (e_q - U)}{RT} f_q^{(0)}. \quad (9)$$

5. Анализ устойчивости алгоритма и способов его стабилизации.

Основной (и практически единственный) метод расчета уравнения (9) вытекает явно из его структуры – это метод расщепления по физическим процессам. В зарубежной литературе, он получил наименование “распространение и соударение”. Математически это приводит к разбиению начально-краевой задачи для $f_q(x, t)$ (9) на два вида уравнений:

Уравнение конвективного переноса:

$$\frac{\partial f'_q}{\partial t} + e_q \cdot \nabla_x f'_q = 0, \quad (10)$$

и уравнение соударения:

$$\frac{\partial f_q}{\partial t} = -\frac{f'_q - f_q^{(0)}}{\tau} + \frac{a \cdot (e_q - U)}{RT} f_q^{(0)}. \quad (11)$$

Рассмотрим отдельно методы решения (10) и (11), возможные сложности и ограничения.

Решение начально-краевой задачи для (10) в общем случае приводит к классическому уравнению конвективного переноса. В алгоритме “stream and collide” используется явная схема по времени. Легко показать, что применение явной противопоточной схемы к (10) дает:

$$f_q(x, t + \Delta t) - f_q(x, t) = -CFL(af_q(x + \Delta x, t) + bf_q(x, t) + cf_q(x - \Delta x, t)), \quad (12)$$

что при выборе единичных величин для скоростей e_q , размеров ячейки Δx и шага по времени Δt определяет $CFL=1$. Численная схема (12) обладает схемной вязкостью, равной $1/2$ для $CFL=1$. Ее компенсация возможна на втором шаге схемы расщепления, для чего параметр релаксации уменьшается на $1/2$.

Очевидно, что при выборе отличных от единичных параметров дискретизации Δx , Δt и e_q , либо будет увеличиваться схемная вязкость (при $CFL < 1$), либо численная схема станет неустойчивой (при $CFL > 1$), что является достаточно сильным ограничением. Для преодоления данного препятствия вводится неявная схема, на пример вида:

$$f_q(x, t + \Delta t) = \frac{f_q(x, t) - \frac{1}{2} \Delta t \left((e_q - |e_q|) \cdot \frac{f_q(x + \Delta x, t) - f_q(x - \Delta x, t)}{\Delta x} - (e_q + |e_q|) \cdot \frac{f_q(x - \Delta x, t) - f_q(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \right)}{1 - \Delta t(e_q - |e_q|) / 2\Delta x + \Delta t(e_q + |e_q|) / 2\Delta x}. \quad (14)$$

Поскольку знаменатель всегда строго больше или равен 1, возмущения в (14) будут затухать. Но при этом оптимальное значение числа Куранта–Фридрихса–Леви, при котором схемная вязкость минимальна, будет составлять $CFL=1$.

Для решения (14) можно применять как метод прогонки, так и итерационную схему, которая быстро сходится при $CFL < (5-6)$. В связи с тем, что скорости e_q лежат в пределе ± 1.0 то проблем с немонотонностью не возникает, поэтому к рассматриваемому методу можно не применять алгоритм сохранения полной вариации.

Уравнение (11) относится к типу жесткого дифференциального уравнения, которое при линеаризации $f_q^{(0)}$ имеет аналитическое решение вида (для простоты и далее $a = 0$):

$$f_q = \exp \left(-\frac{t}{\tau} \left(f_q|_0 - \bar{f}_q^{(0)} \left(1 + e^{\left(\frac{t}{\tau} \right)} \right) \right) \right), \quad (15)$$

где $f_q|_0$ - начальное значение PPDF, $\bar{f}_q^{(0)}$ - линеаризованная функция равновесного распределения.

Из (15) очевидно, что для решения (11) необходимо применять численные схемы для решения жестких дифференциальных уравнений. В стандартном алгоритме “stream and collide” используется стандартная схема Эйлера с разностями назад. Для устойчивого решения (11) необходимо применять специальные численные методы решения жестких систем, на пример DUMKA, разработанные В.И.Лебедевым с соавторами [5].

Очевидно, что в уравнениях (8) аналог кинематической вязкости будет иметь форму $\nu = \varepsilon C_s^2$, поскольку, вводя значение характерной скорости время релаксации можно определить как $\tau = U_0 / \lambda$, по (3) $\tau = \Delta t \tau^*$, а число Кнудсена определяется по (6), то тогда:

$\nu = \tau^* C_s^2 \Delta t$, и с учетом компенсации схемной вязкости для (12), кинематическая вязкость определяется как:

$$\nu = (\tau^* - 1/2) C_s^2 \Delta t. \quad (16)$$

Для различных ячеек C_s будет разной, и, следовательно, формула для определения кинематической вязкости по (16) будет справедлива до константы. Так для ячейки D2Q9:

$$\Delta t = \frac{(\tau^* - 1/2) \Delta x^2}{3\nu}, \text{ в безразмерном виде } \Delta t = \frac{(\tau^* - 1/2) \Delta x^2}{3} R \text{ или:}$$

$$\frac{3\Delta t}{R\Delta x^2} + \frac{1}{2} = \tau^*, \quad (17)$$

где $R = UL / \nu$.

При сохранении физического приближения гидродинамики (8) необходимо строгое выполнение (5), поскольку все постоянные в (17) определяются из условия разложения Чэпмена-Энскога для уравнения (4), при этом можно варьировать двумя параметрами для сохранения равенства (17):

1. При фиксированном CFL и R изменять τ^* . Очевидно, что при $R \rightarrow \infty$, время релаксации $\tau^* \rightarrow 1/2$. При этом из (15) понятно, что такая система будет жесткой и необходимо прибегать к специальным методам решения таких систем т.к. стандартный алгоритм “stream and collide” будет неустойчив.
2. При фиксированном R и $\tau^* > 1 = const$ уменьшать Δx . Это приведет к значительным затратам машинного времени и ресурсов при вычислении турбулентных течений поскольку $\Delta x = 1 / N$, где N – количество дискретных элементов разбиения. Этот вариант рассматривается только для достаточно умеренных чисел Рейнольдса, особенно для двумерных ($\Delta x^2 = \Delta x \Delta y$) трехмерных ($\Delta x^2 = \Delta x \Delta y \Delta z$) течений.

Для моделирования реальных турбулентных течений необходимо проанализировать причины неустойчивого поведения (11) при $\tau^* \rightarrow 1/2$ и добиться устойчивого поведения (11) при $R \rightarrow \infty$. При этом приближение гидродинамики (5) и его условие (17) должны выполняться. Причины неустойчивого поведения системы можно разделить следующим образом.

1. Отрицательное значение f_q . Такое поведение (9) возможно если f_q находится “далеко” от квазиравновесного состояния $f_q^{(0)}$. Под “далеко” понимается такое расстояние в L_∞ , что введенные предположения для получения (2) и (3) не выполняются. Такой механизм потери устойчивости можно проследить, если рассмотреть (15) при $\tau = \Delta t \cdot \tau^* = 1/2$. Тогда при сильном отклонении

$$(f_q|_0 - \bar{f}_q^{(0)}) < 0, \quad (18)$$

возмущения в (23) нарастают экспоненциально. В данном случае выбор схемы типа Адамса-Моултона для (11) не исправит ситуации, поскольку поведение (18) не физично и противоречит введенным предположениям и теореме об энтропии [3].

2. Потеря траектории движения на одном шаге по времени. Пусть в уравнении (9) в начальный момент времени для всех $f_q^n = f_q^{(0)}$. И решение (9) продвинулось на один шаг по времени $\Delta t = 1$ как $f_q^{n+1} = L^{-1}(L(f_q^n))$. При $\tau < 1$ попытка решения уравнения (9) с обратным временем для получения начального распределения во всех f_q приведет к отклонению такого распределения от $f_q^{(0)}$, т.е. $f_q^{n+1} \neq f_q^n$.

3. Нелинейность (9). Поскольку выражение (23) линеаризованное около $\bar{f}_q^{(0)}$ только модельное и $f_q^{(0)}(x, t) = F[\sum f_q(r, t)]$, то тогда полная вариация решения TV, определяемая как:

$$TV = \sum_{i \in \mathbb{R}^n} \sup [f_{q_i}(t + \Delta t) - f_{q_i}(t)], \quad (19)$$

будет возрастать со временем. Как известно [8] это приведет к росту возмущений.

На сегодняшний день существуют, кроме перечисленных во введении, два метода решения проблемы неустойчивости. Для решения проблемы 1 в работе [10], предложен достаточно простой способ стабилизации – искусственное возвращение значений f_q в близость к $f_q^{(0)}$ через определенное количество K шагов по времени с тем, чтобы не дать развиться неустойчивости. Условие (19) в явном виде выписать для (9) невозможно, поэтому в [10] $K=1$. Тогда (9) переписывается как (для простоты $a = 0$):

$$\begin{cases} f_q^{n+1} - f_q^n = \frac{f_q^{(0)n} - f_q^n}{\tau^*} - \Delta t \cdot e_q \cdot \nabla_x f_q^n; n - \text{четное} \\ f_q^{n+1} = f_q^{(0)n}; n - \text{нечетное} \end{cases} \quad (20)$$

где n – номер шага по времени. В [10] также показано, что применение схемы (20) полностью снимает не только неустойчивость 1 но и пункты 2 и 3. Для пункта два выпол-

няется интерполяция между $f_q^{(0),n}$ и $f_q^{(0),n+2}$. Третий пункт неустойчивости также исчезает, поскольку

$$\partial \left[\sum_{i \in \mathbb{R}^n} \sup [f_{q_i}(t + \Delta t) - f_{q_i}^{(0)}(t)] - \sum_{i \in \mathbb{R}^n} \sup [f_{q_i}(t + 2\Delta t) - f_{q_i}(t + \Delta t)] \right] / \partial t \leq 0$$

В отличие от (16) схемная вязкость для данной схемы определяется как:

$$\nu = 2(\tau^* - 1)C_s^2 \Delta t, \tag{21}$$

что в соответствии с (21) приводит к $\tau^* \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$. Тогда схема (20) имеет предел по числу Рейнольдса по сравнению со схемой (9), что явно видно из условия устойчивости 2.

Второй метод основан на фильтрации уравнений с целью отсекаания мод решений, соответствующих высоким волновым числам, изложен в работе [9]. Не останавливаясь на детальном анализе работы, можно сказать со слов ее авторов, что в [9] полечен стабилизированный СМБ, который не вносит значительную схемную вязкость. Но при этом, как отмечают сами авторы работы [9], остается нерешенным вопрос о типе фильтра (для каждой НКЗ необходимо подбирать свой), о локальности метода, так как фильтр проводит двойное суммирование по всем элементам, и о трудозатратах алгоритма, которые для фильтрации порядка N^2 , где N – количество ячеек, против алгоритма (10)-(11) для которого трудозатраты алгоритма порядка $\text{Const} \cdot N$.

6. Локальная стабилизация алгоритма

Идея стабилизации основывается на использованных ранее методах ограничения полной вариации решения. Но вместо использования ограничения вариации для f используется ограничение отклонения энтропии, такое, которое противоречит теореме об энтропии [3].

Энтропия определяется как:

$$S = - \int f \ln f \cdot d\bar{e} \cdot d\bar{x}. \tag{21}$$

Тогда задачей ограничителя является оператор:

$$f_q^{n+1} = \min \left(f_q^n; \arg \max_{f_q} (|S^{(0)} - S|) \right), \tag{22}$$

возвращающий значение PPDF к такому, при котором справедливы предположения (2) и (3).

Для определения отклонение энтропии от равновесного состояния используется расстояние Кульбака-Лейблера $\Delta S = - \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \ln \left(\frac{f}{f^{(0)}} \right)$, которое для дискретного варианта записи СМБ определяется как:

$$\Delta S = - \sum_q f_q \cdot \ln \left(\frac{f_q}{f_q^{(0)}} \right). \tag{23}$$

Тогда, окончательно, стабилизированный вариант (11) для алгоритма “stream ad collide” определяется как:

$$\begin{cases} f_q^{n+1} - f_q^n = \frac{f_q^{(0)n} - f_q^n}{\tau^*}; f_q^{n+1} < \arg \max_{f_q} (|S^{(0)} - S|)^n \\ f_q^{n+1} = 1/2(f_q^n + f_q^{(0),n}); f_q^{n+1} \geq \arg \max_{f_q} (|S^{(0)} - S|)^n \end{cases} \quad (24)$$

Очевидно, что тогда $TV = \sum_{i \in \mathbb{R}^n} \sup [f_{q_i}(t + \Delta t) - f_{q_i}(t)]$ либо остается постоянной, либо убывает со временем. Таким образом получается полный аналог ограничителя TVD в классической гидродинамике, как например в [9].

7. Оценка вносимой схемной вязкости. Алгоритм. Тестовые задачи.

Схемная вязкость для алгоритма (24) аналогична (16) за исключением тех ячеек, в которых производится ограничение по расстоянию Кульбака-Лейблера, где вязкость можно определить как:

$$\nu = 2(\tau^* - 1/2)C_s^2 \Delta t. \quad (25)$$

Из (25) видно, что в точках коррекции энтропии схемная вязкость метода выше, чем в (17). Целесообразно проанализировать величину вносимой схемной вязкости на решении тестовых задач.

Для этой цели разработан метод “stream and collide”, в котором использованы методы решения (14) и (24) для задачи расщепления. Расчетная двумерная область покрывается системой связанных D2Q9 ячеек. Алгоритм строится следующим образом:
 1) Задаются начальные условия для макроскопических ρ, U и вычисляется $f^{(0)}$ для всей области.
 2) Ставятся граничные условия на всех границах для макроскопических переменных.
 3) Ставятся граничные условия для PPDF.
 4) Рассчитывается расстояние Кульбака-Лейблера по (23).
 5) Рассчитывается интеграл соударения по (24).
 6) Рассчитывается адвективный перенос по (14).
 7) Находятся макроскопические переменные по дискретному аналогу (5).
 8) Если конец расчетного времени не достигнут, переходим на шаг 2.

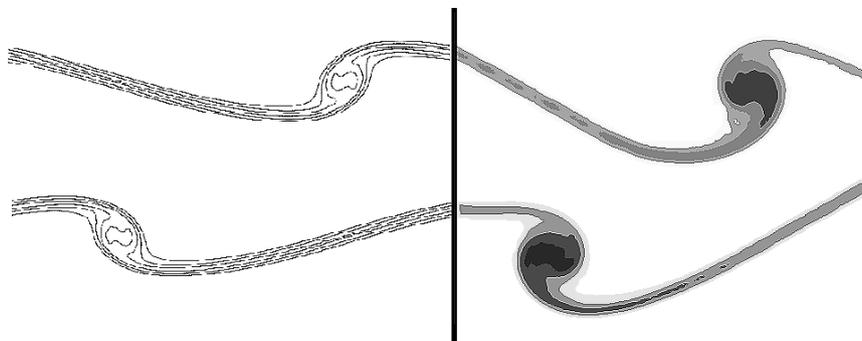


Рис.1. Сопоставление решения задачи (26). Слева – решение из [9]. Справа – текущий алгоритм. Показаны изолинии вихря с числовыми значениями от 0.002 до 0.02 с шагом 0.003.

Сопоставим решение модельной задачи возмущенного пограничного слоя, предложенной и решенной в ряде публикаций, в том числе и в [9]. В квадратной области расчета $\{x,y\} \in [0,1]$, размером 128x128 ячеек с периодическими граничными условиями по всем сторонам ставится начальная задача вида:

$$U_x = \begin{cases} U_0 \tanh[4(y-1/4)/w]; & y \leq 1/2 \\ U_0 \tanh[4(3/4-y)/w]; & y > 1/2 \end{cases} \quad (26)$$

$$U_y = U_0 \cdot \delta \cdot \sin(2\pi(x+1/4)); \rho = \rho_0 = const$$

Здесь $w=0.05$ – параметр, определяющий начальную ширину пограничного слоя, а $\delta = 0.05$ определяет начальное возмущение пограничного слоя. Число Рейнольдса $R=10\,000$, все числовые значения взяты из [9]. На Рис.1. показано сопоставление двух решений задачи (26) при 3300 шагах по времени. Решение слева взято из [9], решение справа получено текущим алгоритмом. Видно, что решение слева обладает большей схемной вязкостью. При этом вязкость фильтрации приводит к тому, что время развития неустойчивости пограничного слоя “запаздывает”, что отчетливо видно по форме двух основных вихрей.

На шаге 3300 по времени корректор энтропии по предложенной схеме (24) применяется только в двух точках, что соответствует 0,0122%. Очевидно, что данная схема вносит минимальную схемную вязкость.

Для оценки корректности предложенного алгоритма проведено решение некоторых классических тестовых задач вычислительной гидродинамики. Сопоставление результатов в задачи о течении в каверне с [11] при $R=(0.1,0.5,1.0,3.0,5.0,10.0) \cdot 10^3$ показало максимальное отличие от результатов других авторов в 1%. Выполнено моделирование течения Пуазейля с периодическими граничными условиями. Для различных чисел R получено, что при $R < 1560$ течение является полностью устойчивым с развитым решением в виде профиля параболы Пуазейля, с отличием от аналитического решения при $R=100$ в 0.54%. При увеличении R течение теряет устойчивость в районе пограничного слоя с образованием сначала крупномасштабных структур ($R < 10\,000$) а затем и всего турбулентного спектра вихрей ($R > 10\,000$). Размерность задачи 1600X400, для моделирования подсеточной турбулентности используется метод динамики больших вихрей с динамической моделью Лэре, основанной на работе [8]. Несмотря на блокировку растяжения и дробления вихрей по литеральному направлению вихревых трубок из-за двухмерности задачи, четко установлен процесс зарождения начальной неустойчивости и транспортировка систем вихрей в ядро потока.

8. Вывод.

Проведен анализ неустойчивости алгоритма решения уравнений Больцмана сеточным методом и способы его стабилизации. Предложен метод стабилизации основанный на локальной коррекции функции распределения частицы в смысле энтропии. Корректор относится к классу ограничителей классических методов вычислительной гидродинамики типа TVD. Алгоритм протестирован на ряде задач и сопоставлен с другим методом стабилизации на геометрии D2Q9. Показано, что вносимая схемная вязкость не превышает десятых долей процента. В настоящее время алгоритм распараллелен для

работы на графических адаптерах с применением технологии CUDA на сетках D3Q15 и D3Q27.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (гранты 08-07-00074а и 09-07-00078а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *David P. Lockard, Li-Shi Luo, Bart A. Singer.* Evaluation of the Lattice-Boltzmann ...// NASA/CR-2000-210550 ICASE Report No. 2000-40.
2. *Nourgaliev, R.R., Dinh, T.A., Dalal, D.C., Dinh, T.N., and Theofanous, T.G.* MuSiC: Multiscale Simulation Code. // UCSB-CRSS Research Report, November 20, 2000, 209p.
3. *Huang K.* Statistical Mechanics, 2nd edition. – WELLY, ISBN: 978-0-471-81518-1, 1988
4. *Alexander J. Wagner.* A Practical Introduction to the Lattice Boltzmann Method. - North Dakota State University, Fargo, 2008.
5. *Medovikov A.A., Lebedev V.I.* Variable time steps optimization...// Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, V.20, 3,2005.
6. *Brian J. N. Wylie* Application of two-dimensional cellular automaton lattice-gas models to the simulation of hydrodynamics. - University of Edinburgh, 1990.
7. *Евстигнеев Н.М.* Интегрирование трехмерных уравнений...// Вычислительные методы и программирование, Т8, стр. 252-264, 2007г.
8. *Evstigneev N.* Integration of 3D... // Proc. Of the VII Int. conf. “Advances in Fluid Mechanics”, Oxford. pp. 194-208, 2008, 15-20 may.
9. *Ricot D., Marie S., Sagaut P., Bailly Ch.* Lattice ...// Journal of Computational Physics 228, pp 4478–4490. 2009.
10. *Ansumali S., V. Karlin I.* Phys. Rev. Lett. 95, 260605, 2005.
11. *Erturk, Corke, Gokcol.* Numerical Solutions of 2-D Steady ...// International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 48, pp. 747-774, 2005.

ON THE LATTICE BOLTZMANN METHOD STABILIZATION FOR TURBULENT FLOW REGIMES WITH EXTREMELY HIGH REYNOLDS NUMBERS

N. Evstigneev

Institute for System Analysis, RAS, Moscow

Abstract. The paper considers a lattice Boltzmann method stabilization when Reynolds number goes to infinity, i.e. infinitely small viscosity. Stream and collide algorithm is considered and every fractural step is analyzed for stability. As the result of the analysis, the local limiter of the particle probability distribution function evolution is introduced for entropy deviation. The limiter is equivalent to the classic CFD TVD limiters. A set of initial-boundary value problems is solved on D2Q9 lattice to verify the method and its stability properties. The work is supported by RFFI grants 08-07-00074a and 09-07-00078a

Key Words: Lattice Boltzmann Method, Stabilization, Computational Fluid Dynamics, Large Eddy Simulation.