УДК 519.635, 532.5.032

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОСРЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ И НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н.М. Евстигнеев

Институт системного анализа РАН, Москва

Аннотация. В данной статье предложена схема осреднения уравнений движения вязкой сжимаемой и несжимаемой Ньютоновской жидкости, позволяющая получить замкнутую систему уравнений для осредненных и флюктуационных составляющих термогидродинамических функций не связанных с размерами сетки, в отличие от LES. Предложен способ численного интегрирования полученных систем уравнений. Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (гранты 08-07-00074а и 09-07-00078а).

Ключевые слова: осреднение, турбулентность, вычислительная гидродинамика.

1. Введение

В настоящее время в области промышленной вычислительной аэрогидродинамики наблюдается тенденция использования моделей динамики крупных вихрей (LES – моделирование) для получения детальной картины турбулентного течения, например [1,2], в которых применяется произвольное “малое” пространственно-временное осреднение, часто связанное с размерами расчетной дискретной сетки. Применение данной методики позволяет провести численный эксперимент и получить достаточно точные значения, которые уже после обрабатываются с привлечением осреднения по О. Рейнольдсу с целью получения статистических характеристик течения (средние значения функций, моменты первого и второго порядка, ковариации и т.д). Отрицательной стороной применения данного подхода является дорогостоящие расчеты и использование значительного машинного времени для больших моделей. Применение осредненных уравнений по Рейнольдсу (RANS – моделирование), замыкаемых какой-либо моделью турбулентности, построенных на полуэмпирической теории (на практике, чаще всего k-e моделью и аналогами), позволяет значительно сократить машинное время расчета и требуемую оперативную память, но при этом может приводить к парадоксальным результатам в сложных задачах, например, при расчете течений в областях особых точек или закрученных течений [2,5].

В настоящей статье предлагается альтернативный подход, который, с одной стороны, сокращает требуемую оперативную память и машинные ресурсы, а, с другой, - позволит повысить точность расчетов по сравнению с RANS-методами.

2. Постановка задачи осреднения

Как известно, осреднение по О. Рейнольдсу выполняется так, что актуальные значения термогидродинамических функций f представляются в виде осредненных по времени $\overline{f}$ и пульсационных f' величин, таких, что $\overline{f}$ не зависит от f' при $t_0 \to \infty$ [3]:

$$f = \overline{f} + f', \quad \overline{f} = \frac{1}{t_0} \int_{t-t_0}^{t} f d\tau, \quad \overline{f'} = \frac{1}{t_0} \int_{t-t_0}^{t} f' d\tau = 0, \tag{1}$$

где t – текущее время, t_0 – время (период) осреднения.

Введем нелинейный дифференциальный оператор $\Re$, являющийся оператором уравнения Навье-Стокса над термогидродинамической функцией $f \in R^n$. В силу нелинейности $\Re$, при применении его на уравнения сохранения импульса и энергии возникают дополнительные пульсационные напряжения, тепловые и диффузионные потоки, вида:

$$\overline{\Re\{f'...\}} = \frac{1}{t_0} \int_{t-t_0}^{t} \Re\{f'...\} d\tau, \tag{2}$$

определение которых и составляет проблему замыкания уравнений для осредненных функций. В отличие от полуэмпирических теорий, где $\overline{\Re\{f'...\}}$ выражается с помощью коэффициентов вязкости или моментов различного порядка, в данной работе предлагается иной подход к осреднению.

По формуле правого прямоугольника [4] с точностью $0(t_0^2)$, получим:

$$\overline{\Re\{f'...\}} = \Re\{f'(x_i,t)...\} - \frac{1}{2} t_0 \frac{\partial}{\partial t} \Re\{f'(x_i,t)...\} + 0(t_0{}^2), \quad i=1,2,3. \tag{3}$$

Данная зависимость (3) позволяет замкнуть систему уравнений для осредненных функций с помощью уравнений для пульсаций. Рассмотрим дифференциальный оператор $\Re$ на случай несжимаемой и сжимаемой жидкости.

3. Несжимаемая жидкость

Итак, для случая несжимаемой жидкости $\Re$ представлен уравнениями сохранения массы и импульса. Уравнения переноса тепла и примеси могут быть получены аналогично:

$$\sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0, \quad \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_j \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \mu \nabla^2 V_i + \rho F_i, \quad j=1,2,3. \tag{4}$$

Здесь ρ - плотность жидкости, V – скорость, P – давление, F – проекция внешней силы, μ - динамическая вязкость (коэффициент вязкости деформаций сдвига).
Применим (1) к (4):

$$\sum_j \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \rho \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} + \sum_j \rho \overline{V}_j \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial \overline{\rho V_j' V_i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} = \mu \nabla^2 \overline{V}_i + \rho \overline{F}_i. \tag{5}$$

Под несжимаемой жидкостью понимается такая, что $\rho' = 0$ и $\rho = \overline{\rho} = const$.

Вычитая (5) из (4) получим:

$$\sum_j \frac{\partial V_j'}{\partial x_j} = 0\,, \quad \rho\frac{\partial V_i'}{\partial t} + \sum_j \rho\left(\overline{V}_j \frac{\partial V_i'}{\partial x_j} + V_j'\frac{\partial V_i'}{\partial x_j} + V_j'\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j}\right) - \sum_j \frac{\partial \overline{\rho V_j' V_i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial P'}{\partial x_i} = \mu\nabla^2 V_i' + \rho F_i'\,. \quad (6)$$

Корреляции вида (2), входящие в (5) и (6) осредняются с помощью (3). В результате получим замкнутую систему:

$$\sum_j \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_j} = 0\,,$$

$$\rho\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} + \rho\sum_j\left[\overline{V}_j\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i' V_j'}{\partial x_j} - \frac{1}{2}t_0\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V_i' V_j'}{\partial t}\right] + \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} = \mu\nabla^2\overline{V}_i + \rho\overline{F}_i\,; \quad (7a)$$

$$\sum_j \frac{\partial V_j'}{\partial x_j} = 0\,,$$

$$\rho\frac{\partial V_i'}{\partial t} + \rho\sum_j\left[\overline{V}_j\frac{\partial V_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i'\overline{V}_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2}t_0\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V_i' V_j'}{\partial t}\right] + \frac{\partial P'}{\partial x_i} = \mu\nabla^2 V_i' + \rho F_i'\,. \quad (7b)$$

Совместно с корректными граничными и начальными условиями, (7) позволяет получить замкнутую систему дифференциальных уравнений для нахождения осредненных и пульсационных значений термогидродинамических величин с точностью $0(t_0^2)$. Понятно, что чем меньше t_0, тем точнее расчет, и тем сильнее система (7) стремится к прямому численному моделированию.

4. Сжимаемая жидкость

Теперь рассмотрим дифференциальный оператор $\Re$ на случай сжимаемой жидкости. Здесь $\Re$ представлен уравнениями сохранения массы, количества движения и энергии. Поскольку используется консервативная форма исходных уравнений, введем поток единицы массы в виде $\rho \cdot V_i = \phi_i$. Газ предполагается политропным, теплопроводным, давление связывается через плотность с помощью уравнения состояния (9):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \phi_i V_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i\,,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial V_j(e + P/\rho)}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial V_i \Theta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial T}{\partial x_i} + \eta\,,$$

$$\Theta_{ij} = \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \lambda\delta_{ij}\sum_k \frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right);\ \text{k=1,2,3;} \quad (8)$$

$$P = (\gamma - 1)(e - 1/2 \cdot \sum_j \rho V_j^2)\ . \quad (9)$$

Здесь: Θ_{ij} - тензор вязких напряжений; е – полная энергия; $(e+P/\rho)$ - энтальпия; η - источниковый член, отвечающий за генерацию тепла; λ - коэффициент объемной вязкости, для гипотезы Дж. Стокса, равный 2/3; δ_{ij} - символ Кронекера. Аналогично с несжимаемой жидкостью, применим (1) к (8):

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial x_j}=0,$$

$$\frac{\partial\overline{\phi_i}}{\partial t}+\sum_j\left[\frac{\partial\overline{\phi_i}\,\overline{V}_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{\phi_i'V'}_j}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i}=\sum_j\frac{\partial\overline{\Theta}_{ij}}{\partial x_j}+\overline{\rho}\,\overline{F}_i+\overline{\rho'F'}_i,$$

$$\frac{\partial\overline{e}}{\partial t}+\sum_j\left[\frac{\partial\overline{V}_j\overline{(e+P/\rho)}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{V_j'(e+P/\rho)'}}{\partial x_j}\right]=\sum_j\left[\frac{\partial\overline{V}_i\overline{\Theta}_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{V_i'\Theta_{ij}'}}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}k\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_i}+\overline{\rho}\,\overline{\eta}+\overline{\rho'\eta'},$$

$$\Theta_{ij}=\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}-\lambda\delta_{ij}\sum_k\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right). \qquad (10)$$

Для сокращения объема записи предположим стационарность внешней силы F и источникового члена генерации тепла η. Вычитая (10) из (8), получим систему уравнений для флюктуационных составляющих:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial\phi_j'}{\partial x_j}=0,$$

$$\frac{\partial\phi_i'}{\partial t}+\sum_j\left[\frac{\partial\phi_i'V_j'}{\partial x_j}+\frac{\partial\phi_i'\overline{V}_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{\phi}_iV_j'}{\partial x_j}-\frac{\partial\overline{\phi_i'V_j'}}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial P'}{\partial x_i}=\sum_j\frac{\partial\Theta_{ij}'}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial e'}{\partial t}+\sum_j\left[\frac{\partial V_j'(e+P/\rho)'}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j'\overline{(e+P/\rho)}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{V}_j(e+P/\rho)'}{\partial x_j}-\frac{\partial\overline{V_j'(e+P/\rho)'}}{\partial x_j}\right]=$$

$$=\sum_j\left[\frac{\partial V_i'\Theta_{ij}'}{\partial x_j}+\frac{\partial V_i'\overline{\Theta}_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{V}_i\Theta_{ij}'}{\partial x_j}-\frac{\partial\overline{V_i'\cdot\Theta'}_{ij}}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}k\frac{\partial T'}{\partial x_i},$$

$$\Theta_{ij}=\mu\left(\frac{\partial V_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j'}{\partial x_i}-\lambda\delta_{ij}\sum_k\frac{\partial V_k'}{\partial x_k'}\right). \qquad (11)$$

Система (10) и (11) дополняется уравнением состояния (9), соответственно, для осредненных и флюктуационных термогидродинамических переменных.
Применяя (3) к виртуальным напряжениям вида (2) в (10) и (11) получим замкнутую систему уравнений:

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial x_j}=0,$$

$$\frac{\partial\overline{\phi_i}}{\partial t}+\sum_j\left[\frac{\partial\overline{\phi_i}\,\overline{V}_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\phi_i'V_j'}{\partial x_j}-\frac{1}{2}t_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_i'V'}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i}=\sum_j\frac{\partial\overline{\Theta}_{ij}}{\partial x_j}+\overline{\rho}F_i,$$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}+\sum_j\left[\frac{\partial \bar{V}_j\overline{(e+P/\rho)}}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j'(e+P/\rho)'}{\partial x_j}-\frac{1}{2}t_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V_j'(e+P/\rho)'}{\partial x_j}\right]=$$

$$=\sum_j\left[\frac{\partial \bar{V}_i\bar{\Theta}_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial V_i'\Theta_{ij}'}{\partial x_j}-\frac{1}{2}t_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V_i'\Theta_{ij}'}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}k\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}+\bar{\rho}\eta,$$

$$\Theta_{ij}=\mu\left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i}-\lambda\delta_{ij}\sum_k\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_k}\right); \qquad (12a)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial \phi_j'}{\partial x_j}=0\,,$$

$$\frac{\partial \phi_i'}{\partial t}+\sum_j\left[\frac{\partial \phi_i'\bar{V}_j}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{\phi}_i V'}{\partial x_j}+\frac{1}{2}t_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_i'V_j'}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial P'}{\partial x_i}=\sum_j\frac{\partial \Theta_{ij}'}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial e'}{\partial t}+\sum_j\left[\frac{\partial V_j'\overline{(e+P/\rho)}}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{V}_j(e+P/\rho)'}{\partial x_j}+\frac{1}{2}t_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V_j'(e+P/\rho)'}{\partial x_j}\right]=$$

$$=\sum_j\left[\frac{\partial V_i'\bar{\Theta}_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{V}_i\Theta_{ij}'}{\partial x_j}+\frac{1}{2}t_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V_i'\Theta_{ij}'}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}k\frac{\partial T'}{\partial x_i},$$

$$\Theta_{ij}=\mu\left(\frac{\partial V_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j'}{\partial x_i}-\lambda\delta_{ij}\sum_k\frac{\partial V_k'}{\partial x_k'}\right). \qquad (12b)$$

Система уравнений (12) позволяет совместно с (9) и корректными начальными и граничными условиями однозначно определить осредненные и флуктуационные термогидродинамические переменные для случая теплопроводного совершенного газа с точностью $0(t_0^2)$, как и для случая несжимаемой жидкости.

Необходимо отметить, что для интегрирования исходных уравнений необходимо перейти к безразмерным переменным, при этом, кроме известных критериев подобия (числа Sh, Re, M, Fr, Eu, Gr, Pr, Nu и др), необходимо ввести еще один критерий, связанный с используемым осреднением (3), вида t_0/t, где t – характерный масштаб времени. Тогда дополнительный критерий будет являться зависимым от числа Струхаля в виде $\frac{t_0\cdot Sh\cdot V}{L}$.

5. Заключение.

Системы (7) и (12) могут быть проинтегрированы только численно. При интегрировании полученных систем уравнений не требуется привлечение дополнительных приемов, заметно усложняющих процесс численного интегрирования. Для этой цели подходят методы, применяемые к исходным, неосредненным уравнениям, с рядом оговорок.

Для системы уравнений (7) несжимаемой жидкости необходимо решать сингулярно-возмущенную задачу для давления с целью согласования полей скорости и давления при $M\to 0$. Для этой цели наиболее распространенные алгоритмы (например SIMPLE, PISO и др [6]), которые приводят в той или иной степени к решению уравнения Пуассона для поправки к давлению на каждом шаге по времени являются неэкономными, т.к. исходные системы будут содержать по два таких уравнения и их обращения приведет к заметному увеличению расхода оперативной памяти и машинного времени. Поэтому, наиболее приемлемым методом для решения уравнения Пуассона в данном случае являются многосеточные методы, на пример [7].

Для систем (7) и (12) крайне важно выполнение балансовых соотношений в сеточном пространстве, для чего целесообразно применить метод конечного объема наряду с привлечением нелинейных противопотоковых схем повышенной точности (например, в концепции TVD).

В настоящее время для решения систем уравнений (7) и (12) использован программный комплекс, основанный на метод конечного объема на неортогональной несвязанной сетке тетраэдров [8]. Получены результаты, подтверждающие правомерность использования предложенного осреднения для ряда классических задач – течение Пуазейля, течения Гогена-Пуазейля, течение Куэтта между двумя цилиндрами, рециркуляционное течение в каверне. Результаты готовятся к публикации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moin P., Mahesh K.* Direct Numerical Simulation: a tool in turbulence research. // Annu. Rev. Fluid Mech. №30, pp.539-578, 1998.
2. *Hoffman J., Johnson C.* Adaptive DNS/LES: a New Agenda in CFD. // Chalmers university of technology. Preprint №23, Sweden, 2003.
3. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч1,2. - М.: Наука, 1965, 1967г.
4. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. - М.: Наука, 1967г.
5. *Фрик П.Г.* Турбулентность: подходы и модели. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003г.
6. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Ч.1,2.- М.: Мир, 1991г.
7. *Евстигнеев Н.М.* Интегрирование уравнения Пуассона..// Вычислительные методы и программирование, Т10, стр. 268-274, 2009г.
8. *Евстигнеев Н.М.* Интегрирование трехмерных уравнений..// Вычислительные методы и программирование, Т8, стр. 252-264, 2007г.

ABOUT ONE AVERAGING METHOD OF THE EQUATIONS OF A COMPRESSIBLE AND INCOMPRESSIBLE LIQUID

N. Evstigneev

Institute for System Analysis, RAS, Moscow

Abstract. This paper proposes a method of averaging for compressible and incompressible Newtonian fluid dynamics equations. This method derives new set of equations for averaged and fluctuating variables with the closed chain of equations for the given averaging scale. This scale is not related with the mesh size, hence the computational procedure is much cheaper than the LES method. Numerical method for the derived equations is proposed. The work is supported by RFFI grants 08-07-00074a and 09-07-00078a.

Key Words: averaging, turbulence, computational fluid dynamics.
УДК 519:532