

6. *Матвеев О.А., Панишина А.В.* К эквивалентности категорий моделей и универсальных алгебр // Материалы X конф. молодых ученых, М.: УДН, 1987 – Деп. в ВИНТИ, № 9153–В 87, с. 144–150.
7. *Бочаров В.Е., Матвеев О.А., Панишина А.В.* О топологических реляционных системах // Материалы 11 конф. молодых ученых, М.: УДН, 1988 – Деп. в ВИНТИ, № 5305–В 88, с. 110–121.
8. *Tin C. Truong, Anh N. Tran.* Structure of Set of Association Rules Based on Concept Lattice In: N. T. Nguyen, R. Katarzyniak, S.-M. Chen (Eds.) Studies in Computational Intelligence, Vol. 283, pp. 217–228. Springer–Verlag, Heidelberg, 2010.
9. *Taouil P. N., Bastide R., Stumme Y., Lakhal G.* Generating a condensed representation for association rules. J. of Intelligent Information Systems 24(1), pp. 29–60, Springer US, 2005.
10. *Viswanath N., Sunderraman R.* A Paraconsistent Relational Data Model In: V. E. Ferragane, J. H. Doorn, L. C. Rivero (Eds.) Handbook of Research on Innovations in Database Technologies and Applications: Current and Future Trends, Vol. I, pp. 18–27, Information Science Reference, N.Y., 2009.

**THE CATEGORY EQUIVALENCE OF MODELS AND UNIVERSAL
ALGEBRAS AS THE BASIS OF THE CONSTRUCTION
OF THE ALGORITHMS OF PROCESSING
OF INTELLIGENT RELATIONAL DATABASES**

A. Martynyuk, O. Matveyev

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The category equivalence of models and universal algebras is proved. The construction may be used of the construction of the algorithms of processing of intelligent relation data bases.

Key words: universal algebra, model, intelligent relational databases.

УДК 517.947

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
С НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ДИФФУЗИИ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

М.Ю. Захаров,^{*} Е.А. Семенчин^{}**

^{*} *ОАО «Научно-производственное объединение «Промавтоматика» (г. Краснодар)*

^{**} *Кубанский государственный университет (г. Краснодар)*

Аннотация. В статье рассматриваются первая и вторая двумерные краевые задачи для уравнения диффузии в изотропной среде с зависящим от концентрации коэффициентом (диффузии). Численное решение таких задач сопряжено с большими трудностями. Используется методика, основанная на дискретизации исходных задач по времени и итерационном процессе построения для каждого рассматриваемо-

го момента времени приближенных решений вспомогательных линейных задач. Приближенные решения вспомогательных задач строятся методом базисных потенциалов. С помощью данной методики построены приближенные решения рассматриваемых нелинейных задач. Приведен общий вид этих приближенных решений. На конкретных примерах показана сходимость приближенных решений задач к точным.

Ключевые слова: метод базисных потенциалов, краевые задачи с нелинейными уравнениями, диффузия в изотропной среде.

Введение

Известно, что коэффициенты диффузии в жидкостях могут существенным образом зависеть от концентрации диффундирующего вещества [1, 511]. Часто коэффициент диффузии линейно зависит от концентрации, но в некоторых случаях (например, в водных растворах метанола, этанола и ацетона) с увеличением концентрации он вначале уменьшается, а затем – возрастает [1, 498; 2].

Для описания процесса диффузии в вышеуказанных растворах используются краевые задачи для квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью [3, 110; 4, 55; 5, 431; 6, 509, 541]. Условия существования и единственности классических решений первой и второй краевых задач для таких уравнений приведены в [6, 513, 560]. Однако их численное решение наталкивается на значительные трудности [7, 271]. В данной работе методом, описанным в [8], будут построены в явном аналитическом виде приближенные решения подобных задач.

1. Постановки задач

Задача 1. Плоская первая краевая задача, описывающая диффузию в изотропной среде в случае, когда коэффициент диффузии зависит от концентрации диффундирующего вещества, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right] = \\ = f(\omega) \Delta \omega + f_{\omega}'(\omega) \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 \right], \mathbf{x} \in G \subset R^2, \\ \omega = \omega_0(\mathbf{x}) \text{ при } t = 0, \\ \omega = \omega_s(t, \mathbf{x}) \text{ на } \Sigma, \end{cases} \quad (1.1)$$

где: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$;

$\omega = \omega(t, x_1, x_2)$ - концентрация диффундирующего вещества, $\omega \geq a > 0$; $a = \text{const}$.

$f(\omega)$ - коэффициент диффузии, $f(\omega) \geq b > 0$, $b = \text{const}$;

G - ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей Σ .

Будем предполагать, что

$$\Sigma \in C^3, \omega_0 \in C^3(\bar{G}), \omega_s \in C_{t,x}^{2,3}((0, +\infty) \times \Sigma), f(\omega) \in C^2(a, +\infty). \quad (1.2)$$

В этом случае классическое решение (1.1) существует и единственно [6, 513].

Задача 2. Плоская вторая краевая задача, описывающая диффузию в изотропной среде в случае, когда коэффициент диффузии зависит от концентрации диффундирующего вещества, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right] = \\ = f(\omega) \Delta \omega + f'_{\omega}(\omega) \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 \right], \mathbf{x} \in G \subset R^2, \\ \omega = \omega_0(\mathbf{x}) \text{ при } t = 0, \\ f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial n} = \omega_s(t, \mathbf{x}) \text{ на } \Sigma. \end{cases} \quad (1.3)$$

где: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$;

$\omega = \omega(t, x_1, x_2)$ - концентрация диффундирующего вещества, $\omega \geq a > 0, a = const$;

$f(\omega)$ - коэффициент диффузии, $f(\omega) \geq b > 0, b = const$;

G - ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей Σ ;

$\frac{\partial}{\partial n}$ - дифференцирование по направлению внешней к G нормали.

Будем предполагать, что

$$\Sigma \in C^3, \omega_0 \in C^1(\overline{G}), \omega_s \in C_{t,x}^{1,2}((0, +\infty) \times \Sigma), f(\omega) \in C^2(a, +\infty). \quad (1.4)$$

В этом случае классическое решение (1.3) существует и единственно [6, 560].

Замечание. При $f(\omega) = \omega$ уравнение в (1.1), (1.3) называется уравнением Буссинеска [3, 102].

Цель данной работы – с помощью методики, предложенной в [8], построить приближенные решения задач (1.1), (1.3) при $f(\omega) = \omega$, провести численный анализ этих решений.

2. Методика построения приближенного решения задачи 1

Процесс построения приближенного решения задачи (1.1) разобьем на два этапа [8].

2.1. Проведем дискретизацию задачи (1.1) по времени.

Пусть $\Psi_k(\mathbf{x})$ - приближение решения задачи (1.1) в момент времени $t_k, k = 0, 1, \dots, t_0 = 0, \Psi_0(\mathbf{x}) = \omega_0(\mathbf{x}), t_{k+1} - t_k = \tau$. Используя неявную аппроксимационную схему, запишем для определения $\Psi_{k+1}(\mathbf{x}), k = 0, 1, \dots$, следующие задачи:

$$\begin{cases} \frac{\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) - \Psi_k(\mathbf{x})}{\tau} = f(\Psi_{k+1}) \Delta \Psi_{k+1}(\mathbf{x}) + \\ f'_{\Psi_{k+1}}(\Psi_{k+1}) \left[\left(\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right)^2 \right], \mathbf{x} \in G, \\ \Psi_{k+1}(\mathbf{x})|_{\Sigma} = \omega_s(t_{k+1}, \mathbf{x}). \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2. Построим при-

ближенное решение задачи (2.1).

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \Delta \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) = \Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G, \\ \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})|_{\Sigma} = \omega_s(t_{k+1}, \mathbf{x}), \end{cases} \quad (2.2)$$

где $k = 0, 1, \dots$

Приближенное решение (2.2) $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$ будем искать методом точечных потенциалов [9].

Начальное приближение $\Phi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x})$ правой части уравнения в (2.2) выбираем из $C^\alpha(\bar{G})$ ($0 < \alpha < 1$). Тогда при заданной функции $\omega_s(t_{k+1}, \mathbf{x})$ из (2.2) в силу (1.2) решение (2.2) при $i = 1$ существует, единственно и принадлежит $C^2(\bar{G})$ ([10, 145]). Последующие приближения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots$, в правой части уравнения из (2.2) определяются соотношением:

$$\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \left[\frac{(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N - \Psi_k(\mathbf{x})}{\tau} - f_{(\Psi_{k+1}^{(i)})_N} \left((\Psi_{k+1}^{(i)})_N \right) \left[\left(\frac{\partial (\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right] / f((\Psi_{k+1}^{(i)})_N), \mathbf{x} \in G \quad (2.3)$$

На основании (1.2) для $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ из (2.3), при заданной $\omega_s(t_{k+1}, \mathbf{x})$ из (2.2), решение (2.2) также существует и принадлежит $C^2(\bar{G})$ ([10, 145]).

Процесс построения приближенных решений $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$ задачи (2.2) для приближений правой части уравнения (2.2), определяемых (2.3), завершаем для заданного $\varepsilon > 0$ на l_{k+1} -й итерации, если выполнится неравенство

$$\left\| \Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(l_{k+1}+1)}(\mathbf{x}) \right\|_{C(\bar{G})} < \varepsilon.$$

В этом случае полагаем:

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx (\Psi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}))_N.$$

После определения $\Psi_{k+1}(\mathbf{x})$, найдем аналитический вид приближенного решения задачи (2.1), воспользовавшись результатами работы [9]:

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{A} \left(- \int_G \Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \int_{\Sigma} \omega_s(t_{k+1}, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} \alpha_j(\mathbf{y}) + C \right) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y} \right), \quad (2.4)$$

где $A = 2\pi$, $\mathbf{x} \in G$; π , $\mathbf{x} \in \Sigma$; $c_j^{(k+1)}$ - коэффициенты, определяющие приближение неизвестной плотности логарифмического потенциала простого слоя $\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{y})}{\partial n}$:

$$\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{y})}{\partial n} \approx \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} \alpha_j(\mathbf{y}) + C \right); \quad k = 0, 1, \dots; \quad \alpha_j(\mathbf{y}) = \ln |\mathbf{x}^j - \mathbf{y}|^{-1} - J_j, \quad \mathbf{y} \in \Sigma,$$

$$J_j = \int_{\Sigma} \ln |\mathbf{x}^j - \mathbf{y}|^{-1} ds_y / |\Sigma|, \quad \mathbf{x}^j \notin \bar{G}, \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad C = \int_G \Phi_{k+1}^{(k+1)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} / |\Sigma|, \quad |\Sigma| - \text{мера } \Sigma.$$

Замечание. В силу равномерной сходимости приближенного решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона к точному и устойчивости приближенного решения к возмущениям правой части уравнения [9] из сходимости в $L_2(G)$ последовательности $\Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})$ при $i \rightarrow \infty$ следует сходимость в $C(\bar{G})$ $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N \rightarrow \Psi_{k+1}(\mathbf{x})$ при $N \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$. Сходимость последовательности $\Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})$ при $i \rightarrow \infty$ можно обеспечить путем выбора подходящей величины шага дискретизации τ .

3. Методика построения приближенного решения задачи 2

Будем дополнительно требовать выполнения условия непроницаемости границы для диффузии:

$$f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma,$$

оно позволяет использовать для приближенного решения нижеуказанной вспомогательной задачи (см. (3.2)) метод точечных потенциалов.

По аналогии с п. 2 рассмотрим два этапа построения приближенного решения.

3.1. Проведем дискретизацию задачи (1.3) по времени.

Пусть $\Psi_k(\mathbf{x})$ - приближение решения задачи (1.3) в момент времени t_k , $k = 0, 1, \dots$, $t_0 = 0$, $\Psi_0(\mathbf{x}) = \omega_0(\mathbf{x})$, $t_{k+1} - t_k = \tau$. Используя неявную аппроксимационную схему, запишем для определения $\Psi_{k+1}(\mathbf{x})$, $k = 0, 1, \dots$, следующие задачи:

$$\begin{cases} \frac{\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) - \Psi_k(\mathbf{x})}{\tau} = f(\Psi_{k+1}) \Delta \Psi_{k+1}(\mathbf{x}) + f'_{\Psi_{k+1}}(\Psi_{k+1}) \left[\left(\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right)^2 \right], \quad \mathbf{x} \in G, \\ f(\Psi_{k+1}(\mathbf{x})) \frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2. Построим приближенное решение задачи (3.1).

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \Delta \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) = \Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \\ \frac{\partial \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $k = 0, 1, \dots$.

Приближенное решение (3.2) $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$ будем искать методом точечных потенциалов [11]. Известно, что решение задачи (3.2) определено с точностью до постоянного слагаемого. Это слагаемое определим, исходя из условия сохранения массы примеси:

$$\int_G \left((\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N - \omega_0(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} = 0, \quad (3.3)$$

которое вытекает из соотношения:

$$f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma.$$

В дальнейшем будем считать, что в приближенном решении (3.2) постоянное слагаемое скорректировано и $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$ удовлетворяет условию (3.3).

Начальное приближение $\Phi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x})$ правой части уравнения в (3.2) выбираем из $C^\alpha(\bar{G})$ ($0 < \alpha < 1$). Тогда при заданном граничном условии решение (3.2) при $i = 1$ существует и принадлежит $C^2(\bar{G})$ ([10, 179]). Последующие приближения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots$, в правой части уравнения из (3.2) определяются соотношением:

$$\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N - \Psi_k(\mathbf{x})}{\tau} - f_{(\Psi_{k+1}^{(i)})_N} \left((\Psi_{k+1}^{(i)})_N \right) \left[\left(\frac{\partial (\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] \right\} / f \left((\Psi_{k+1}^{(i)})_N \right), \mathbf{x} \in G \quad (3.4)$$

На основании (1.4) для $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ из (3.4), при заданном граничном условии, решение (3.2) также существует и принадлежит $C^2(\bar{G})$ ([10, 179]).

Согласно формуле Грина и (3.2) для $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ из (3.4) должно выполняться соотношение:

$$\int_G \Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.5)$$

При необходимости корректируем $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ с помощью аддитивной постоянной так, чтобы выполнялось условие (3.5).

Процесс построения приближенных решений $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$ задачи (3.2) для приближений правой части уравнения (3.2), определяемых (3.4), завершаем для заданного $\varepsilon > 0$ на l_{k+1} -й итерации, если выполнится неравенство

$$\left\| \Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(l_{k+1}+1)}(\mathbf{x}) \right\|_{C(\bar{G})} < \varepsilon.$$

В этом случае полагаем:

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx (\Psi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}))_N.$$

Используя результаты [11], приведем аналитический вид приближенного решения задачи (3.1):

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{A} \left[- \int_G \Phi_{k+1}^{(k+1)}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \int_{\Sigma} \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} \beta_j(\mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{s}_y \right], \quad (3.6)$$

где $A = 2\pi$, $\mathbf{x} \in G$; π , $\mathbf{x} \in \Sigma$; $c_j^{(k+1)}$ - коэффициенты, определяющие приближение неизвестной плотности логарифмического потенциала двойного слоя $\Psi_{k+1}(\mathbf{y})$:

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{y}) \approx \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} \beta_j(\mathbf{y}) \right); \quad k = 0, 1, \dots; \quad \beta_j(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{y}|} = \frac{(\mathbf{x}^j - \mathbf{y}, \mathbf{n}_y)}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{y}|^2}, \quad \mathbf{y} \in \Sigma,$$

$\mathbf{x}^j \notin \bar{G}$, $j = 1, 2, \dots, N$.

4. Пример 1

Построим вышеописанным методом (с использованием среды Borland Delphi 7 и вычислительных библиотек компилятора Compaq Fortran) приближенное решение задачи (1.1) при $f(\omega) = \omega$.

Пусть область G представляет собой круг единичного радиуса с центром в начале координат: $G = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Зададим в G функцию [3, 103]:

$$\omega(t, x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{6(t+1)} + x_1(t+1)^{-1/3} + 1,5(t+1)^{1/3}, \quad (4.1)$$

которая является точным решением задачи (1.1) при $f(\omega) = \omega$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega(0, x_1, x_2) &= \omega_0(x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{6} + x_1 + 1,5, \\ \omega(t, x_1, x_2)|_{\Sigma} &= \omega_s(t, x_1, x_2) = \tilde{\omega}_s(t, r, \varphi)|_{r=1, \varphi \in [0, 2\pi]} = -\frac{\sin^2 \varphi}{6(t+1)} + \cos \varphi (t+1)^{-1/3} + 1,5(t+1)^{1/3}. \end{aligned}$$

Пусть $t \in [0, 1]$, шаг дискретизации по времени $\tau = 0,1$, $\|\omega(t_{k+1}, \mathbf{x}) - \Psi_{k+1}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{G})} < \varepsilon$, $k = 0, 1, \dots, 9$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

Значения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ были найдены с помощью (2.3) (во всех узлах интегрирования по G). В качестве первого приближения правой части уравнения в (2.2) для каждого временного слоя был выбран лапласиан решения, полученного на предыдущем временном слое:

$$\Delta \Psi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x}) = \Delta \Psi_k(\mathbf{x}), \quad k = 0, 1, \dots, 9,$$

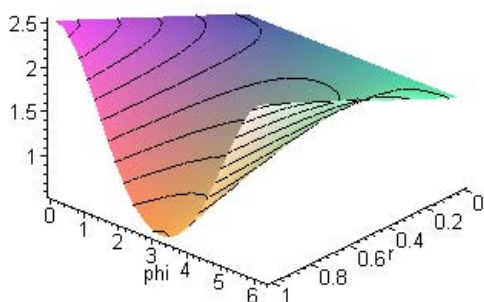
где $\Delta \Psi_k(\mathbf{x}) = \Delta(\Psi_k^{(i_k)}(\mathbf{x}))_N = \Phi_k^{(i_k)}(\mathbf{x})$, $\|\omega(t_k, \mathbf{x}) - (\Psi_k^{(i_k)}(\mathbf{x}))_N\|_{C(\bar{G})} < \varepsilon$, $k = 1, \dots, 9$.

Приближенное решение (2.1) (см. (2.4)) в данном случае имеет вид:

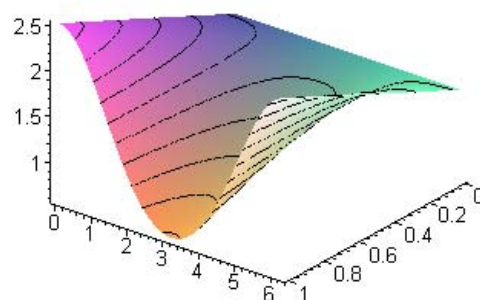
$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{A} \left(- \int_G \Phi_{k+1}^{(i_{k+1})}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \int_{\Sigma} \left[\omega(t_{k+1}, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \left(\sum_{j=1}^{40} c_j^{(k+1)} \alpha_j(\mathbf{y}) + C \right) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right] d\mathbf{s}_y \right), \quad (4.2)$$

где $k = 0, 1, \dots, 9$, $|\mathbf{x}^j| = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 40$.

Сравнивая значения построенного приближенного (4.2) и точного (4.1) решений задачи (1.1) для различных моментов времени, убедимся, что они отличаются незначительно: абсолютная погрешность имеет порядок 10^{-3} (см. рисунки 1-3).

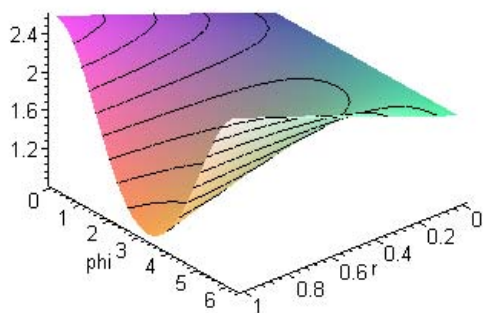


Точное решение

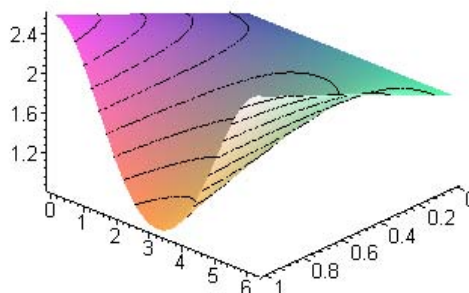


Приближенное решение

Рис. 1. Точное и приближенное решение задачи 1 для $t=0,1$
(Количество итераций: 1; норма в $C(\bar{G})$ разности решений: 0,008)

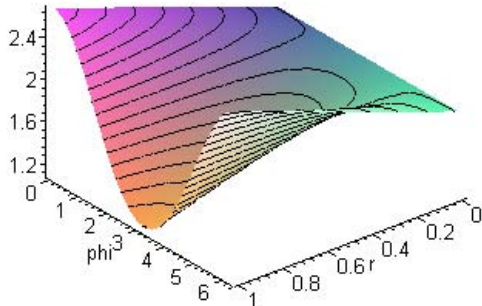


Точное решение

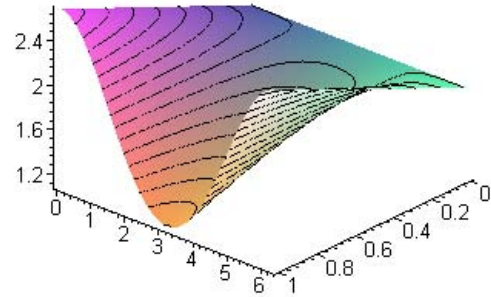


Приближенное решение

Рис. 2. Точное и приближенное решение задачи 1 для $t=0,5$
(Количество итераций: 1, норма в $C(\bar{G})$ разности решений: 0,009)



Точное решение



Приближенное решение

Рис. 3. Точное и приближенное решение задачи 1 для $t=1,0$
(Количество итераций: 1, норма в $C(\bar{G})$ разности решений: 0,009)

5. Пример 2

Построим вышеописанным методом (с использованием среды Borland Delphi 7 и вычислительных библиотек компилятора Compaq Fortran) приближенное решение задачи (1.3) при $f(\omega) = \omega$.

Пусть область G представляет собой круг единичного радиуса с центром в начале координат: $G = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$;

$$\omega_0(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + 2;$$

$$\omega_S(t, x_1, x_2) = 0;$$

$$t \in [0, 1], \text{ шаг дискретизации по времени } \tau = 0,1; \|\Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(l_{k+1}+1)}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{G})} < \varepsilon,$$

$$k = 0, 1, \dots, 9, \varepsilon = 10^{-1}.$$

Значения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ были вычислены с помощью (3.4) (во всех узлах интегрирования по G). В качестве первого приближения правой части уравнения в (3.2) для каждого временного слоя был выбран лапласиан решения, построенный на предыдущем временном слое:

$$\Delta \Psi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x}) = \Delta \Psi_k(\mathbf{x}), k = 0, 1, \dots, 9,$$

где

$$\Delta \Psi_k(\mathbf{x}) = \Delta \left(\Psi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}) \right)_N = \Phi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}), \|\Phi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}) - \Phi_k^{(l_k+1)}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{G})} < \varepsilon, k = 1, \dots, 9.$$

Приближенное решение (3.1) (см. (3.6)) в данном случае имеет вид:

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{A} \left[- \int_G \Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \int_{\Sigma} \left(\sum_{j=1}^{40} \mathcal{C}_j^{(k+1)} \beta_j(\mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{s}_y \right], \quad (5.1)$$

где $k = 0, 1, \dots, 9$, $|\mathbf{x}^j| = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 40$.

Графики построенного приближенного (5.1) решения задачи (1.3) для различных моментов времени приведены на рис. 4-7. Норма в $C(\bar{G})$ невязки имеет порядок 10^{-2} .

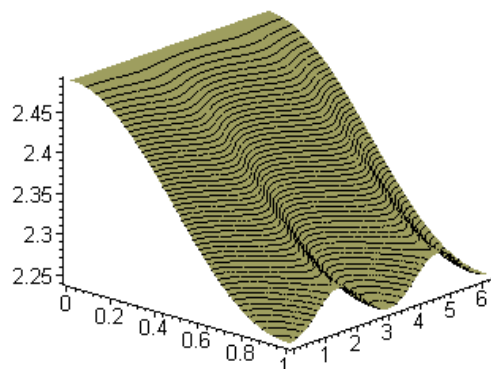


Рис. 4. Приближенное решение задачи 2 для $t=0,1$
(Количество итераций: 6; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,09)

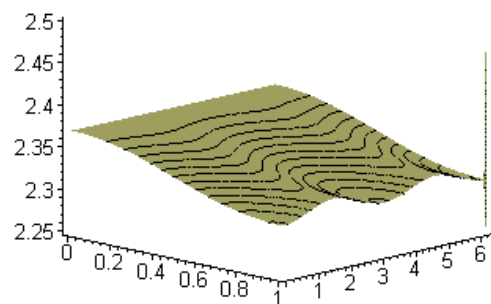


Рис. 5. Приближенное решение задачи 2 для $t=0,2$
(Количество итераций: 7; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,06)

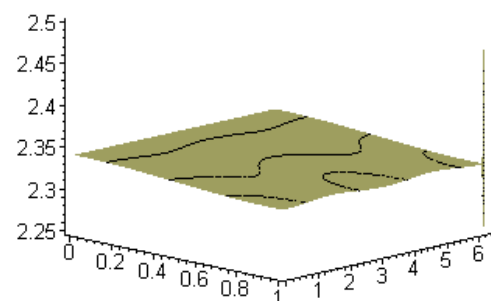


Рис. 6. Приближенное решение задачи 2 для $t=0,3$
(Количество итераций: 4; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,08)

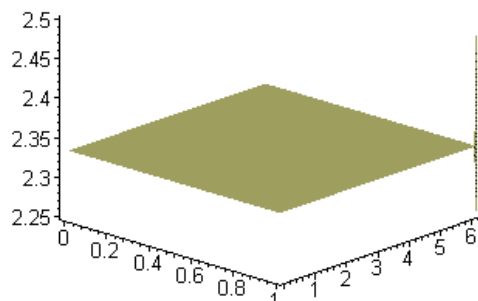


Рис. 7. Приближенное решение задачи 2 для $t=0,4$
(Количество итераций: 2; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,05)

Выводы

С помощью методики, основанной на дискретизации по времени исходной задачи и методе точечных потенциалов, предложенной в [8], построены приближенные решения нелинейных краевых задач (1.1) и (1.3).

Численные расчеты (см. рисунки 1-3) показывают, что приближенное решение (4.2) задачи (1.1) быстро сходится к точному решению (4.1) на рассматриваемом интервале времени: максимум модуля погрешности порядка 10^{-3} и высокое качественное совпадение решений достигается за 1-2 итерации (причем для относительно большого шага дискретизации по времени: $\tau = 0,1$).

Приближенное решение (5.1) задачи (1.3) также быстро сходится на рассматриваемом интервале времени: максимум модуля невязки порядка 10^{-2} достигается за 2-7 итераций ($\tau = 0,1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С. Бретшнайдер. – М.-Л.: Химия, 1966. – 535 с.
2. Шервуд Т. Массопередача / Т. Шервуд. – М.: Химия, 1982. – 695 с.
3. Полянин А.Д., Зайцев, В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
4. Годунов С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. – М.: Наука, 1979 – 391 с.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева, Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

8. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. Построение приближенного решения краевой задачи, описывающей рассеяние примеси в атмосфере, методом точечных потенциалов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 4. с. 20-27 .
9. Захаров М.Ю. О построении приближенного решения плоской задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом точечных потенциалов. / М.Ю. Захаров, Е.А. Семенчин // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т.16. – ВВ.3. – С. 463-464.
10. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. - 576 с.
11. Захаров М.Ю. Обратная задача определения плотности логарифмического потенциала двойного слоя и применение к решению краевой задачи // Численный анализ: теория, приложения, программы. М.: МГУ, 1999. С. 113-120.

**CONSTRUCTING THE APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE
TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY PROBLEMS WITH THE
NONLINEAR EQUATION OF DIFFUSION IN THE ISOTROPIC ENVIRONMENT**

M. Zaharov,* E. Semenchin*

* *Open Society «Research-and-production association « Promavtomatika» (Krasnodar)*

** *Kuban State University, Krasnodar*

Abstract. In article the first and second two-dimensional boundary problems for the diffusion equation in the isotropic environment with coefficient (of diffusion) depending on concentration are considered. Construction of the numerical solution of such problems is interfaced to great difficulties. The technique based on discretization of initial problems on time variable and iterative process of construction for each considered moment of time of approximate solutions of auxiliary linear problems is used. The approximate solutions of auxiliary problems are under construction the method of basic potentials. With the help of this technique are constructed approximate solutions of considered nonlinear problems. The general view of these approximate solutions is reduced. On concrete examples convergence of approximate solutions of the problems to the exact is shown.

Key words: the method of basic potentials, boundary problems with the nonlinear equations, the diffusion in the isotropic environment.