

ON LOCAL INVARIANT AFFINE CONNECTED SPACES

O. Matveyev,^{*} H. Nesterenko^{**}

^{*} Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

^{**} Peoples' Friendship University of Russia (PFUR)
6, Miklucho-Maklaya str., 117198, Moscow

Abstract: In this paper the necessary and sufficient conditions for the wide class locally invariant affine connected manifolds are found. The cases of locally invariance of an affine connected space with respect to reductive and symmetric spaces are considered.

Key words: affine connection, locally invariance, reductive space, almost symmetric space, quasigroup.

УДК 512.57 + 510.67

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КАТЕГОРИЙ МОДЕЛЕЙ И
УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР, КАК ОСНОВА ПОСТРОЕНИЯ
АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ РЕЛЯЦИОННЫХ БАЗ ЗНАНИЙ

А.Н. Мартынюк, О.А. Матвеев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Доказывается эквивалентность категорий моделей и универсальных алгебр. Конструкция может быть использована для построения алгоритмов обработки реляционных баз знаний.

Ключевые слова: универсальная алгебра, модель, реляционные базы знаний.

Целью настоящей заметки является построение категории $U - ALGEBRAS$, эквивалентной категории моделей одной и той же сигнатуры с многозначными гомоморфизмами в качестве морфизмов. Объектами категории $U - ALGEBRAS$ служат однотипные универсальные алгебры, морфизмами – гомоморфизмы универсальных алгебр. Конструкция носит теоретико – множественный, алгебраический характер.

Представляет определенный интерес спецификация категории $U - ALGEBRAS$, используя аппарат топологии, нечетких множеств. Чтобы осуществлять направленный перебор вариантов в реляционных базах знаний, необходимо выбрать семантический базис первичных понятий. В этом может помочь выбор соответствующей топологии в основном носителе категории $U - ALGEBRAS$, то есть рассматривать не все возможные подмножества, а только замкнутые в выбранной топологии. Время поиска в

той, или иной реляционной базе знаний существенно зависит от того, насколько сильна выбранная топология.

Взаимодействие и взаимосвязь системного подхода, теории множеств и теории категорий, бинарной логики и теории алгебраических систем, теории нечетких множеств, многозначной логики и топологии приводят к необходимости построения обобщенной трактовки типовой модели интеллектуальной базы знаний. Эта модель должна быть достаточно гибкой и универсальной для адекватного описания, а также детализации различных предметных областей.

Синтетический подход к моделированию, состоящий в применении различных мощных математических теорий, приводит и к формированию новых математических инструментов. Так, как нам представляется, успешно может быть использованы понятия топологической модели и топологической реляционной системы. Действительно, на языке топологии поддаются осмыслению и точному описанию семантические базисы (лингвистические тезаурусы), иерархический процесс представления базисных объектов наборами основных признаков с заданными внутренними ассоциативными связями. При таком подходе признаковое пространство наделяется топологической структурой и множеством четких и/или нечетких отношений различной местности. Граф состояний, получаемый при таком подходе, является достаточно точным аналогом моделируемой ситуации.

Создание алгоритмов для обработки реляционных баз знаний является актуальной проблемой [8-106].

Далее мы даем набросок построения совместной теории моделей и универсальных алгебр.

Определение 1. Моделью (реляционной системой) $M = \langle A, \Omega \rangle$ называется некоторое множество A с заданным на нем набором отношений различной арности (местности). Множество Ω называется сигнатурой. Арность отношения будем указывать верхним индексом в скобках: $R^{(n)} \in \Omega$.

Определение 2. Соответствие $\varphi \subset A \times B$ называется многозначным (двусторонним) гомоморфизмом из модели $M_1 = \langle A, \Omega \rangle$ в модель $M_2 = \langle B, \Omega \rangle$, если для любого n -арного отношения $R^{(n)}$ из сигнатуры Ω

$$((a_1, b_1) \in \varphi) \wedge \dots \wedge ((a_n, b_n) \in \varphi) \Rightarrow [R^{(n)}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{(n)}(b_1, \dots, b_n)] \quad (1)$$

Модели одной и той же сигнатуры с многозначными гомоморфизмами в качестве морфизмов образуют категорию, которую мы будем обозначать *MODELS*.

Определение 3. Универсальной алгеброй $A = \langle A, \Phi \rangle$ называется множество A с заданным на нем набором Φ операций различной арности. Под n -арной ($n \geq 1$) операцией $\omega^{(n)} \in \Phi$ понимается отображение

$$\omega^{(n)} : \underbrace{A \times \dots \times A}_n \rightarrow A .$$

0-арная операция фиксирует в множестве A определенный элемент.

Из определений 1 и 3 следует, что универсальная алгебра является частным случаем модели. Действительно, для каждой n -арной операции $\omega^{(n)} \in \Phi$ универсальной алгебры $A = \langle A, \Phi \rangle$ можно определить $(n+1)$ -арное отношение $R^{(n+1)}$ на A следующей формулой

$$R^{(n+1)}(a_1, \dots, a_{n+1}) \Leftrightarrow a_{n+1} = \omega^{(n)}(a_1, \dots, a_n) . \quad (2)$$

Определение 4. Отображение $f : A \rightarrow B$ называется гомоморфизмом универсальной алгебры A в универсальную алгебру B , если для любого $\omega^{(n)} \in \Phi$ и любых $a_1, \dots, a_n \in A$

$$f(\omega^{(n)}(a_1, \dots, a_n)) = \omega^{(n)}(f(a_1), \dots, f(a_n)) . \quad (3)$$

Предложение 1. Пусть $M = \langle A, \Omega \rangle$ – модель. Для каждого отношения $R^{(n)}$ определим $(n-1)$ -арную операцию $\omega^{(n-1)}$ на множестве 2^A всех подмножеств из A следующим образом:

а) если $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$, то определим:

$$\omega^{(n-1)}(a_1, \dots, a_{n-1}) = \{a \in A : R^{(n)}(a_1, \dots, a_{n-1}, a)\} ,$$

б) если $M_1, \dots, M_{n-1} \in 2^A$, $M_k \neq \emptyset$, $k = \overline{1, n-1}$, то

$$\omega^{(n-1)}(M_1, \dots, M_{n-1}) = \bigcup_{a_1 \in M_1} \dots \bigcup_{a_{n-1} \in M_{n-1}} \omega^{(n-1)}(a_1, \dots, a_{n-1})$$

в) если хотя бы одно из множеств $M_k \in 2^A$, $k = \overline{1, n-1}$ пусто, то

$$\omega^{(n-1)}(M_1, \dots, M_{n-1}) = \emptyset .$$

Пусть Φ – множество всех так определенных операций на множестве 2^A . Тогда $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ – универсальная алгебра, где \cup – бинарная операция объединения, \emptyset – нульарная операция взятия пустого множества и выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned} \omega^{(n)}(\emptyset, M_2, \dots, M_n) &= \emptyset , \\ \omega^{(n)}(M_1, \emptyset, \dots, M_n) &= \emptyset , \\ \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, \emptyset) &= \emptyset , \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \omega^{(n)}(M_1 \cup N_1, M_2, \dots, M_n) &= \\
 &= \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \cup \omega^{(n)}(N_1, M_2, \dots, M_n), \\
 \omega^{(n)}(M_1, M_2 \cup N_2, \dots, M_n) &= \\
 &= \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \cup \omega^{(n)}(M_1, N_2, \dots, M_n), \\
 \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n \cup N_n) &= \\
 &= \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \cup \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, N_n),
 \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Тождества (4) следуют из пункта в) определения операций $\omega^{(n)}$. Докажем, что выполняются тождества (5):

$$\begin{aligned}
 \omega^{(n)}(M_1 \cup N_1, M_2, \dots, M_n) &= \bigcup_{a_1 \in M_1 \cup N_1} \bigcup_{a_2 \in M_2} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \omega^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \\
 &= \left[\bigcup_{a_1 \in M_1} \bigcup_{a_2 \in M_2} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \omega^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right] \cup \left[\bigcup_{a_1 \in N_1} \bigcup_{a_2 \in M_2} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \omega^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right] = \\
 &= \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \cup \omega^{(n)}(N_1, M_2, \dots, M_n)
 \end{aligned}$$

Остальные тождества (5) доказываются аналогично.

Определение 5. Универсальную алгебру $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ будем называть надмодельной, если она может быть получена с помощью конструкции, изложенной в предложении 1, из некоторой модели $M = \langle A, \Phi \rangle$. В этом случае будем также говорить, что алгебра A построена над моделью M .

Предложение 2. Универсальная алгебра $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$, в которой \cup – бинарная операция объединения, \emptyset – нульарная операция взятия пустого множества и для каждой операции $\omega^{(n)} \in \Phi$ выполняются тождества (4) и (5), является надмодельной.

Доказательство. На множестве 2^A определим для каждой n -арной операции $\omega^{(n)} \in \Phi$ $(n+1)$ -арное отношение $R^{(n+1)}$ на множестве 2^A следующим образом:

$$R^{(n+1)}(M_1, \dots, M_{n+1}) \Leftrightarrow M_{n+1} \subset \omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n). \tag{6}$$

Рассмотрим ограничение отношения $R^{(n+1)}$ на множество A . Таким образом, получаем модель $M = \langle A, \Omega \rangle$, где сигнатура Ω состоит из всех так построенных операций $\omega^{(n)} \in \Phi$ отношений $R^{(n+1)}|_A$. Согласно предложению 1 построим надмодельную универсальную алгебру $\bar{A} = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \tilde{\Phi} \rangle$ и докажем, что $\bar{A} = A$. Для этого надо

убедиться в том, что существует такая биекция $\phi: \Phi \rightarrow \bar{\Phi}$, что для любого $\omega^{(n)} \in \Phi$ выполняется равенство $\omega^{(n)} = \phi(\omega^{(n)})$. Биекция ϕ строится следующим образом: для любой операции $\omega^{(n)} \in \Phi$ по формуле (3) взаимно однозначно находится отношение $R^{(n+1)} \in \Omega$, по отношению $R^{(n+1)}$ взаимно однозначно находится операция $\bar{\omega}^{(n)} \in \bar{\Phi}$ по правилам а) – в) из предложения 1. Положим $\phi(\omega^{(n)}) = \bar{\omega}^{(n)}$. Если $a_1, \dots, a_n \in A$, то

$$a_{n+1} \in \omega^{(n)}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{(n+1)}(a_1, \dots, a_{n+1}) \Leftrightarrow a_{n+1} \in \bar{\omega}^{(n)}(a_1, \dots, a_n).$$

Если $M_1, \dots, M_n \in 2^A$, $M_k \neq \emptyset$, $k = \overline{1, n}$, то по пункту б) из предложения 1

$$\bar{\omega}^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \bigcup_{a_1 \in M_1} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \bar{\omega}^{(n)}(a_1, \dots, a_n).$$

С другой стороны, применяя тождество (5), получаем

$$\omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \bigcup_{a_1 \in M_1} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \omega^{(n)}(a_1, \dots, a_n).$$

Следовательно, $\bar{\omega}^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n)$.

Если хотя бы одно из множеств $M_k \in 2^A$, $k = \overline{1, n}$ пусто, то по пункту в) предложения 1 $\bar{\omega}^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \emptyset$. С другой стороны, по тождествам (4) получаем $\omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \emptyset$. Итак, мы доказали, что $\phi(\omega^{(n)}) = \omega^{(n)}$.

Пример. Пусть $M = \langle A, \rho \rangle$ – модель с одним бинарным отношением ρ , которое является отношением квазипорядка, т.е. выполняются следующие условия:

$$a \rho a \text{ – рефлексивность,} \tag{7}$$

$$(a \rho b) \wedge (b \rho c) \Rightarrow a \rho c \text{ – транзитивность.} \tag{8}$$

В этом случае универсальная надмодельная алгебра имеет вид

$$A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \sigma \rangle,$$

где σ – унарная операция на 2^A , удовлетворяющая следующим тождествам:

$$\sigma(\emptyset) = \emptyset, \tag{9}$$

$$\sigma\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} \sigma(M_i) \text{ – тождество линейности,} \tag{10}$$

(I – некоторое множество индексов),

$$M \subset \sigma(M), \quad (11)$$

$$\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M) \text{ – тождество идемпотентности.} \quad (12)$$

Тождества (9) и (10) следуют соответственно из соотношений (4) и (5), тождества (11) и (12) непосредственно следуют из условий (7) и (8).

Заметим, что из тождеств (9) – (12) следует, что σ есть оператор замыкания Куратовского ([5], с. 18 – 19).

Нетрудно также проверить, что если в универсальной алгебре с унарной операцией выполняются тождества (9) – (12), то на A существует отношение квазипорядка ρ такое, что алгебра A построена над моделью $M = \langle A, \rho \rangle$.

Из предложений 1 и 2 следует

Предложение 3. Существует взаимно однозначное соответствие между моделями и универсальными алгебрами вида $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$, где

\cup – бинарная операция объединения, \emptyset – нульарная операция взятия пустого множества и для любой операции выполняются тождества (4) и (5).

Предложение 4. Пусть $M_1 = \langle A, \Omega \rangle$ и $M_2 = \langle B, \Omega \rangle$ – модели, имеющие одну и ту же сигнатуру, $\varphi \subset A \times B$ – многозначный гомоморфизм из M_1 в M_2 . Пусть $A_1 = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ и $A_2 = \langle 2^B, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ – универсальные алгебры, построенные соответственно над моделями M_1 и M_2 . Определим отображение $f_\varphi: 2^A \rightarrow 2^B$ следующим образом:

- а) $f_\varphi(\emptyset) = \emptyset$,
- б) $\forall a \in A \quad f_\varphi(a) = \{b \in B : (a, b) \in \varphi\}$,
- в) $\forall M \in 2^A \quad f_\varphi(M) = \bigcup_{a \in M} f_\varphi(a)$.

Тогда отображение f_φ есть гомоморфизм из универсальной алгебры A_1 в универсальную алгебру A_2 .

Доказательство. Требуется доказать, что отображение обладает следующими свойствами:

$$f_\varphi(\emptyset) = \emptyset, \quad (13)$$

$$f_\varphi(N \cup M) = f_\varphi(N) \cup f_\varphi(M), \quad (14)$$

$$f_\varphi(\omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n)) = \omega^{(n)}(f_\varphi(M_1), \dots, f_\varphi(M_n)) \quad (15)$$

$$\forall \omega^{(n)} \in \Phi, \quad M_1, \dots, M_n \in 2^A.$$

Свойство (13) следует из пункта а) предложения 4. Докажем свойство (14):

$$f_\varphi(N \cup M) = \bigcup_{a \in N \cup M} f_\varphi(a) = \left(\bigcup_{a \in N} f_\varphi(a) \right) \cup \left(\bigcup_{a \in M} f_\varphi(a) \right) = f_\varphi(N) \cup f_\varphi(M).$$

Докажем свойство (15):

$$\begin{aligned}
 & b \in f_\varphi(\omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n)) \Leftrightarrow (\exists a \in \omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n) : b \in f_\varphi(a)) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (\exists a \in \omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n) : (a, b) \in \varphi) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (\exists a : R^{(n+1)}(M_1, \dots, M_n, a) \wedge ((a, b) \in \varphi)) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (\exists a \in A : \forall a_1 \in M_1, \dots, \forall a_n \in M_n \quad R^{(n+1)}(a_1, \dots, a_n, a) \wedge ((a, b) \in \varphi)) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (\forall a_1 \in M_1, \dots, \forall a_n \in M_n : ((a_1, b_1) \in \varphi) \wedge \dots \wedge ((a_n, b_n) \in \varphi) \wedge ((a, b) \in \varphi)) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow R^{(n+1)}(b_1, \dots, b_n, b) \Leftrightarrow R^{(n+1)}(f_\varphi(M_1), \dots, f_\varphi(M_n), b) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow b \in \omega^{(n)}(f_\varphi(M_1), \dots, f_\varphi(M_n)).
 \end{aligned}$$

Обращая рассуждения предложения 4, приходим к следующему результату:

Предложение 5. Пусть $A_1 = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ и $A_2 = \langle 2^B, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ – универсальные алгебры, построенные над моделями $M_1 = \langle A, \Omega \rangle$ и $M_2 = \langle B, \Omega \rangle$. Пусть $f : A_1 \rightarrow A_2$ – гомоморфизм. Тогда существует единственный многозначный гомоморфизм φ из модели M_1 в модель M_2 такой, что

$$\text{а) } \forall a \in A \quad f(a) = \{b \in B : (a, b) \in \varphi\},$$

$$\text{б) } \forall M \in 2^A \quad f(M) = \bigcup_{a \in M} f(a).$$

Определение 6. Категорию, объектами которой являются универсальные алгебры вида $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$, с тождествами (4) и (5), а морфизмами – гомоморфизмы, будем называть категорией $U - ALGEBRAS$.

Предложения 1 – 5 приводят к следующему результату.

Теорема. Категории $MODELS$ и $U - ALGEBRAS$ – эквивалентны.

Сформулируем основные выводы из построенной конструкции.

- 1) Сведение моделей к некоторому примитивному классу универсальных алгебр влечет за собой обогащение теории моделей; в частности, возможно перенесение на модели понятий конгруэнции, фактор–алгебры и так далее. Так, например, понятие конгруэнции приводит к иерархии представлений реляционной системы.
- 2) Эквивалентность категории моделей некоторой категории универсальных алгебр может служить основой построения алгоритмов обработки реляционных баз знаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Общая алгебра. М.: Наука, 1974. – 160с.
2. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. М.: Мир, 1976. – 400с.
3. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. – 392с.
4. Шнейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. М.: Радио и связь, 1982. – 152с.
5. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979. – 336с.

6. *Матвеев О.А., Панишина А.В.* К эквивалентности категорий моделей и универсальных алгебр // Материалы X конф. молодых ученых, М.: УДН, 1987 – Деп. в ВИНТИ, № 9153–В 87, с. 144–150.
7. *Бочаров В.Е., Матвеев О.А., Панишина А.В.* О топологических реляционных системах // Материалы 11 конф. молодых ученых, М.: УДН, 1988 – Деп. в ВИНТИ, № 5305–В 88, с. 110–121.
8. *Tin C. Truong, Anh N. Tran.* Structure of Set of Association Rules Based on Concept Lattice In: N. T. Nguyen, R. Katarzyniak, S.-M. Chen (Eds.) Studies in Computational Intelligence, Vol. 283, pp. 217–228. Springer–Verlag, Heidelberg, 2010.
9. *Taouil P. N., Bastide R., Stumme Y., Lakhal G.* Generating a condensed representation for association rules. J. of Intelligent Information Systems 24(1), pp. 29–60, Springer US, 2005.
10. *Viswanath N., Sunderraman R.* A Paraconsistent Relational Data Model In: V. E. Ferragane, J. H. Doorn, L. C. Rivero (Eds.) Handbook of Research on Innovations in Database Technologies and Applications: Current and Future Trends, Vol. I, pp. 18–27, Information Science Reference, N.Y., 2009.

**THE CATEGORY EQUIVALENCE OF MODELS AND UNIVERSAL
ALGEBRAS AS THE BASIS OF THE CONSTRUCTION
OF THE ALGORITHMS OF PROCESSING
OF INTELLIGENT RELATIONAL DATABASES**

A. Martynyuk, O. Matveyev

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The category equivalence of models and universal algebras is proved. The construction may be used of the construction of the algorithms of processing of intelligent relation data bases.

Key words: universal algebra, model, intelligent relational databases.

УДК 517.947

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
С НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ДИФФУЗИИ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

М.Ю. Захаров,^{*} Е.А. Семенчин^{}**

^{*} *ОАО «Научно-производственное объединение «Промавтоматика» (г. Краснодар)*

^{**} *Кубанский государственный университет (г. Краснодар)*

Аннотация. В статье рассматриваются первая и вторая двумерные краевые задачи для уравнения диффузии в изотропной среде с зависящим от концентрации коэффициентом (диффузии). Численное решение таких задач сопряжено с большими трудностями. Используется методика, основанная на дискретизации исходных задач по времени и итерационном процессе построения для каждого рассматриваемо-