

5. Карман Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства, сборник работ. – М.:ИЛ. 1949 – 384 с.
6. Matveyev O., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. Webs and Quasigroups. Tver, 2002, pp. 78-85.
7. Matveyev O., Nesterenko E.L. The real prosymmetric spaces. Non – associative algebra and its applications. 2006, V.246, Ch. 19, pp.253-260.

AFFINELY CONNECTED SPACES WITH GENERALIZED ALGEBRAIC MOUFANG PROPERTY

H. Nesterenko

*Peoples' Friendship University of Russia (PFUR)
6, Miklucho-Maklaya str., 117198, Moscow*

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. In this paper twolateral manifolds of affine connection are introduced, the algebraic description is given, some differential identities of this class of spaces are obtained. Twolateral manifolds of affine connection of zero curvature are discussed, it is proved that Moufang loops, and only them, are geodesic loops of smooth twolateral zero curvature spaces. The precise algebraic description of wide class of affinely connected spaces is obtained. These spaces are of definite scientific interest.

Key words: geodesic loops, Moufang loops, affinely connected spaces.

УДК 512+515.1:007

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РЕЛЯЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

О.А. Матвеев

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. В статье вводятся в рассмотрение топологические реляционные системы для моделирования различных предметных областей. Проведена формализация процедуры определения типа объектов в пространстве признаков предметной области.

Ключевые слова. Реляционная система, топология, семантический базис, модели.

Введение

Высокая сложность, многообразие функций современных технических, технологических, диагностико – медицинских, экономических, информационно - педагогических систем представляют необходимость учета большого числа факторов, выявления и анализа всех конкурентоспособных вариантов с целью повышения обоснованности принятия промежуточных и окончательных решений. Это особенно важно на начальных этапах разработок. Эффективным подходом к решению этих задач является автоматизация информационного обеспечения проектирования (ИОП), основанная на применении баз данных (БД) и баз знаний (БЗ).

При разработке БД и БЗ важное место занимают вопросы моделирования предметных областей. Под предметной областью понимается совокупность объектов, их свойств и отношений между ними, являющихся частью реального мира и принадлежащих сфере проблемной ориентации разрабатываемой информационной системы.

Таким образом, актуальной задачей автоматизации ИОП различных сложных систем является разработка моделей соответствующих предметных областей.

В настоящее время имеется значительное количество типов моделей данных и их конкретных представителей, в числе которых наиболее перспективными, на наш взгляд, являются реляционные базы данных и базы знаний.

Взаимодействие и взаимосвязь системного подхода, теории множеств и теории категорий, бинарной логики и теории алгебраических систем, теории нечётких множеств, многозначной логики и топологии приводят к обобщенной трактовке типовой модели предметной области, достаточно гибкой и универсальной для описания и детализации разных аспектов многообразия существующих концептуальных реализаций в моделировании.

Синтетический подход к моделированию, состоящий в применении различных мощных математических теорий, приводит и к формированию новых математических объектов, таких, как предлагаемые нами понятия топологической модели и топологической реляционной системы. В то же время поддается осмыслению и описанию на языке топологии такое фундаментальное кибернетическое понятие как семантический базис. Иерархический процесс описания базисных объектов наборами основных признаков с заданными внутренними ассоциативными и неассоциативными связями приводит к построению класса признаковых пространств, наделенных структурой отношений различной арности.

Модель данных определим как упорядоченную тройку $D = \langle Q, P, S \rangle$, где Q - множество имен объектов ПО, P - множество характеристических признаков (свойств, параметров) объектов из Q , S - множество отношений (чётких и/или нечётких) различных арностей, заданных на множествах Q и P . Каждый характеристический признак $P_i \in P$ рассматривается как отображение $P_i: Q \rightarrow V_i$, где V_i – область значений (шкалы) признака P_i , причем для удобства рассмотрения будем считать, что областью определения отображения P_i является всё множество Q .

Рассмотрим понятия: тип объектов и пространство признаков ПО. Будем говорить, что объекты $q_1, q_2 \in Q$ являются объектами одного типа, если q_1 и q_2 не различимы в D посредством множества характеристических признаков P .

Ясно, что свойство объектов принадлежать одному типу есть отношение эквивалентности на Q и, следовательно, определяет некоторое разбиение Q на непересекающиеся подмножества. Проведём теоретико-множественное описание типов объектов. Если $P = \{P_i, i = \overline{1, k}\}$, где $P_i: Q \rightarrow V_i$ - отображения с областью значений V_i , то для

любого элемента $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, принадлежащего декартову произведению $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k$, определим подмножество $U_v \subset Q$ следующей формулой: $U_v = P_1^{-1}(v_1) \cap \dots \cap P_k^{-1}(v_k)$. Из теории множеств следует ([7]), что если $v \neq \bar{v}$, то $U_v \cap U_{\bar{v}} = \emptyset$, и любое подмножество в Q , которое можно описать посредством множества характеристических признаков P , является объединением некоторого числа множеств вида U_v . Таким образом, объекты q_1 и q_2 - одного типа, если существует такое $v \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k$, что $q_1 \in U_v$ и $q_2 \in U_v$. Если $\text{card}(V_i)$ - число элементов в множестве V_i , то общее число типов объектов меньше или равно произведению $\prod_{i=1}^k \text{card}(V_i)$. Если число объектов в точности равно $\prod_{i=1}^k \text{card}(V_i)$, то признаки $P_1, \dots, P_k$ являются (объектно) независимыми. Пространство признаков V объектов ПО определим как образ отображения $\bar{P}: Q \rightarrow V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k$, где $\bar{P}(q) = (P_1(q), \dots, P_k(q))$. Ясно, что пространство признаков объектов ПО совпадает с $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k$ тогда и только тогда, когда признаки $P_1, \dots, P_k$ - независимы.

Особый интерес представляет частный случай, когда все множества V_i состоят из двух элементов: нуля и единицы. Тогда каждый признак из P можно рассматривать как характеристическую функцию на Q и отождествить каждый признак $P_i \in P$ с некоторым подмножеством $M_i \subset Q$. Введем обозначения $M_i^0 = M_i$, $M_i^1 = Q \setminus M_i$, $1 \leq i \leq k$. Пусть m - некоторое натуральное число меньше или равное 2^k , пусть $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ есть его двоичная запись, т.е. $i_s = 0$ или $i_s = 1$ и $m = i_1 \cdot 2^{k-1} + i_2 \cdot 2^{k-2} + \dots + i_{k-1} \cdot 2 + i_k$.

Множество вида $L_m = M_1^{i_1} \cap M_2^{i_2} \cap \dots \cap M_k^{i_k}$ будем называть конституентой ([7], с. 29). Ясно, что общее число различных конституент не превосходит 2^k . В теории множеств доказаны следующие факты:

- а) различные конституенты имеют пустое пересечение;
- б) объединение всех конституент равно Q ;
- в) каждое множество M_i равно объединению конституент, содержащих сомножитель M_i^0 ;
- г) каждое непустое множество, образованное из множеств $M_1, \dots, M_k$ при помощи операций объединения, пересечения и вычитания, является объединением некоторого числа конституент.

Из свойств а) - г) следует, что объекты q_1 и q_2 одного типа, если q_1 и q_2 принадлежат одной конституенте. Пространство признаков V - суть множество всех конституент. Если все конституенты не пусты, то признаки $P_1, \dots, P_k$ называются независимыми, и в этом случае пространство признаков имеет мощность 2^k .

Аналогичным образом могут быть введены типы свойств.

Упорядоченную пару (ρ_1, ρ_2) будем называть конгруенцией реляционной системы $D = \langle Q, P, S \rangle$, если

- а) ρ_1 - отношение эквивалентности на множестве имен объектов
- б) ρ_2 - отношение эквивалентности на множестве характеристических признаков P ,
- в) эквивалентные объекты неразличимы в D посредством множества характеристических признаков P и множества отношений S ,

г) эквивалентные признаки неразличимы в D посредством множества отношений S .

Из теории реляционных систем следует, что любая конгруенция определяет гомоморфизм реляционной системы D на некоторую реляционную систему $\bar{D} = \langle \bar{Q}, \bar{P}, \bar{S} \rangle$, причем мощность множеств $\bar{Q}$ и $\bar{P}$ меньше мощности соответственно множеств Q и P . Рассмотрение реляционной системы D с точностью до конгруенции соответствует определенной иерархии представления предметной области в нашей модели.

В процессе представления данных о ПО в предложенной форме моделирования подлжет динамическому доопределению следующие факты:

- 1) Новые, принадлежащие данной ПО, объекты, их свойства и новые существенные свойства уже определенных объектов.
- 2) Новые отношения, отражающие взаимосвязи между объектами ПО и их характеристиками.

Некоторые предварительные выводы состоят в следующем:

1. Рассмотрен подход к моделированию предметных областей различных систем на основе реляционных моделей баз данных, обеспечивающий адекватность, максимальную простоту и минимальную избыточность представления предметной области системы в форме реляционной системы.
2. Проведена формализация процедуры определения типа объектов и пространства признаков предметной области, что позволяет проводить автоматизированный анализ зависимости характеристических признаков объектов. Предложенный алгоритм позволяет отбросить ненесущие смысловой нагрузки характеристические признаки объектов, что упрощает без потери информации исходную модель.
3. На основе понятий конгруенции и гомоморфизма реляционной системы определяется иерархия представления предметной области системы в форме реляционной модели.
4. В результате представления информации о предметной области на уровне основных понятий и определения системного подхода получена типовая для широкого класса систем модель данных.
5. Предложенный подход развивает формализацию эвристических процедур в рамках реляционных моделей данных и может быть применен для построения логико – семантических моделей.

§1. Категории топологических реляционных систем и топологических моделей (основные определения)

В настоящем параграфе вводится в рассмотрение топологические модели и топологические реляционные системы, которые далее обсуждаются с категорной точки зрения.

Определение 1.1. Моделью $\mathcal{M} = \langle M, S \rangle$ характеристики $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ называется множество M , на котором заданы отношения $R^{(n_1)}, R^{(n_2)}, \dots, R^{(n_k)}$ соответственно арностей $n_1, n_2, \dots, n_k$; $R^{(n_i)} \subset M^{n_i}, i = \overline{1, k}$, (т.е. n_i -арное отношение есть некоторое подмножество n_i -той декартовой степени множества M). Множество $S = \{R^{(n_1)}, R^{(n_2)}, \dots, R^{(n_k)}\}$

называется сигнатурой модели $\mathbf{M}$, число $q = \max_{1 \leq i \leq k} n_i$ будем называть порядком модели $\mathbf{M}$.

Замечание 1.1. Модели и их морфизмы являются предметом самостоятельной математической теории (см., например, [8]), кибернетические проблемы, связанные с теорией моделей, подробно обсуждаются в работе [10].

Определение 1.2 Реляционной системой характеристики $(l; (n_1, m_1), \dots, (n_k, m_k))$ будем называть упорядоченную тройку $\mathbf{R} = \langle M, P, S \rangle$, где M есть множество, на котором заданы унарные отношения $P_1, P_2, \dots, P_l$, $P_i \subset M$, $i = \overline{1, l}$; множество $P = \{P_1, P_2, \dots, P_l\}$ называется множеством признаков реляционной системы $\mathbf{R}$; S есть множество отношений различных арностей, заданных на множествах M и P , т.е. $S = \{R^{(n_1, m_1)}, R^{(n_2, m_2)}, \dots, R^{(n_k, m_k)}\}$, где $R^{(n_i, m_i)} \subset M^{n_i} \times P^{m_i}$, $i = \overline{1, k}$. Число $q = \max_{1 \leq i \leq k} \{n_i, m_i\}$ будем называть порядком реляционной системы $\mathbf{R}$.

Замечание 1.2. В математической литературе термины «модель» и «реляционная система» синонимичны; введенное же нами понятие реляционной системы, вообще говоря, обобщает понятие модели. Действительно из операций 1.1 и 1.2 следует, что при $P = \emptyset$ ($\emptyset$ - пустое множество) реляционная система $\mathbf{R}$ является моделью. Также ясно, что если в реляционной системе $\mathbf{R}$ все числа $m_1, m_2, \dots, m_k$ равны нулю, то $\langle M, S' \rangle$, где $S' = \{P, S\}$, есть модель. Кроме того, если $\mathbf{R} = \langle M, P, S \rangle$ - реляционная система, то $\langle M, P \rangle$ есть модель порядка 1. В связи с этим, изучение моделей первого порядка важно для исследования реляционных систем.

Определение 1.3. Две реляционные системы $\mathbf{R} = \langle M, P, S \rangle$ и $\overline{\mathbf{R}} = \langle \overline{M}, \overline{P}, \overline{S} \rangle$ будем называть однотипными, если существуют биекция $g: P \rightarrow \overline{P}$ и биекция $h: S \rightarrow \overline{S}$, такая, что $h(R^{(n_i, m_i)}) = \overline{R}^{(n_i, m_i)}$. Другими словами, две реляционные системы однотипны, если у них одинаковое количество признаков, и между множествами отношений S и $\overline{S}$ может быть установлено взаимно однозначное соответствие, при котором арности соответствующих отношений совпадают.

Определение 1.4. Пусть $\mathbf{R} = \langle M, P, S \rangle$ и $\overline{\mathbf{R}} = \langle \overline{M}, \overline{P}, \overline{S} \rangle$ - однотипные реляционные системы, g - биективное отображение множества P на множество $\overline{P}$, h - биекция множества S на множество $\overline{S}$, такая что $h(R^{(n_i, m_i)}) = \overline{R}^{(n_i, m_i)}$. Пусть f - отображение множества M в множество $\overline{M}$. Упорядоченную тройку отображений (f, g, h) будем называть гомоморфизмом реляционной системы $\mathbf{R}$ в реляционную систему $\overline{\mathbf{R}}$, если выполняются следующие два условия:

а) для любого $P_i \in P$, для любого $x \in M$

$$(x \in P_i) \Rightarrow (f(x) \in g(P_i));$$

б) для любого $R^{(n_i, m_i)} \in S$, для любого $y \in M^{n_i} \times P^{m_i}$,

$$y = (y_1, \dots, y_{n_i}; z_1, \dots, z_{m_i}) \\ [y \in R^{(n_i, m_i)}] \Rightarrow [(f(y_1), \dots, f(y_{n_i}), g(z_1), \dots, g(z_{m_i})) \in h(R^{(n_i, m_i)})]$$

Из определений 1.2 – 1.4 немедленно следует:

Предложение 1.1. Класс однотипных реляционных систем является классом объектов некоторой категории, морфизмами которой служат гомоморфизмы реляционных систем.

Определение 1.5. Две однотипные реляционные системы $R = \langle M, P, S \rangle$ и $\bar{R} = \langle \bar{M}, \bar{P}, \bar{S} \rangle$ называются изоморфными, если существуют гомоморфизмы (f, g, h) реляционной системы R в $\bar{R}$ и $(\bar{f}, g^{-1}, h^{-1})$ реляционной системы $\bar{R}$ в R , такие что $\bar{f} \circ f$ - тождественное отображение на M .

Замечание 1.3. Существует естественный функтор вложения категории моделей в категорию реляционных систем, т.о., можно считать категорию моделей полной подкатегорией категории реляционных систем. С другой стороны, такие понятия теории моделей как подмодель, наименьший гомоморфный образ, конгруенция и т.д. очевидным образом обобщаются в соответствующие понятия для реляционных систем.

Определение 1.6. Топологической моделью $TM = \langle X, U \rangle$ характеристики $(n_1, \dots, n_k)$ будем называть топологическое пространство X и множество $U = \{r^{(n_1)}, \dots, r^{(n_k)}\}$, где $r^{(n_i)} (i = \overline{1, k})$ есть непрерывное отображение $r^{(n_i)}: X^{n_i} \rightarrow V_i$, V_i - некоторое топологическое пространство. Число $q = \max_{1 \leq i \leq k} n_i$; будем называть порядком топологической модели TM .

Определение 1.7. Топологической реляционной системой характеристики $(l; (n_1, m_1), \dots, (n_k, m_k))$ будем называть упорядоченную тройку $TR = \langle X, W, U \rangle$, где X есть топологическое пространство, на котором заданы непрерывные отображения $W_1, W_2, \dots, W_l$, $W_i: X \rightarrow Z_i$; $Z_i (i = \overline{1, l})$ - некоторое топологическое пространство, $W = \{W_1, \dots, W_l\}$, U - множество отображений $U = \{U^{(n_1, m_1)}, \dots, U^{(n_k, m_k)}\}$, причем, отображение $U^{(n_i, m_i)}: X^{n_i} \times W^{m_i} \rightarrow V_i$ таково, что V_i есть топологическое пространство, X^{n_i} - декартова степень топологического пространства X , наделенного тихоновской топологией, и при любом фиксированном $W \in W^{m_i}$ отображение $f_i: X^{n_i} \rightarrow V_i$, $f_i(x) = U^{(n_i, m_i)}(x, w)$ есть непрерывное отображение. Число $q = \max_{1 \leq k \leq k} \{n_i, m_i\}$ будем называть порядком топологической реляционной системы TR .

Определение 1.8. Пусть $TM = \langle X, U \rangle$ и $\bar{TM} = \langle \bar{X}, \bar{U} \rangle$ две топологические модели одной и той же характеристики $(n_1, \dots, n_k)$, $U = \{r^{(n_1)}, \dots, r^{(n_k)}\}$, где $r^{(n_i)}: X^{n_i} \rightarrow V_i (i = \overline{1, k})$, $\bar{U} = \{\bar{r}^{(n_1)}, \dots, \bar{r}^{(n_k)}\}$, где $\bar{r}^{(n_i)}: \bar{X}^{n_i} \rightarrow \bar{V}_i$. Будем говорить, что TM и $\bar{TM}$ однотипны, если существует гомеоморфизмы $f_i: V_i \rightarrow \bar{V}_i (i = \overline{1, k})$.

Определение 1.9. Пусть $TR = \langle X, W, U \rangle$ и $\bar{TR} = \langle \bar{X}, \bar{W}, \bar{U} \rangle$ - две топологические реляционные системы. Характеристики

$$(l; (n_1, m_1), \dots, (n_k, m_k)); \quad W = \{W_1, \dots, W_l\},$$

где $W_i : X \rightarrow Z_i \quad (i = \overline{1, l})$; $U = \{U^{(n_1, m_1)}, \dots, U^{(n_k, m_k)}\}$, $U^{(n_i, m_i)} : X^{n_i} \times W^{m_i} \rightarrow V_i \quad (i = \overline{1, k})$,
 $\overline{W} = \{\overline{W}_1, \dots, \overline{W}_l\}$,
 где $\overline{W}_i : \overline{X} \rightarrow \overline{Z}_i$ $\overline{U} = \{\overline{U}^{(n_1, m_1)}, \dots, \overline{U}^{(n_k, m_k)}\}$, $\overline{U}^{(n_i, m_i)} : (\overline{X})^{n_i} \times (\overline{W})^{m_i} \rightarrow \overline{V}_i \quad (i = \overline{1, k})$.

Будем говорить, что TR и $\overline{TR}$ однотипны, если существуют гомеоморфизмы $f_i : V_i \rightarrow \overline{V}_i \quad (i = \overline{1, k})$ и гомеоморфизмы $g_j : Z_j \rightarrow \overline{Z}_j \quad (j = \overline{1, l})$.

Определение 1.10. Пусть TM и $\overline{TM}$ - две однотипные топологические модели. $TM = \langle X, U \rangle$, $U = \{r^{(n_1)}, \dots, r^{(n_k)}\}$, $r^{(n_i)} : X^{n_i} \rightarrow V_i$, $(i = \overline{1, k})$; $\overline{TM} = \langle \overline{X}, \overline{U} \rangle$, $\overline{U} = \{\overline{r}^{(n_1)}, \dots, \overline{r}^{(n_k)}\}$, $\overline{r}^{(n_i)} : (\overline{X})^{n_i} \rightarrow \overline{V}_i \quad (i = \overline{1, k})$; отображения $f_i : V_i \rightarrow \overline{V}_i \quad (i = \overline{1, k})$ есть гомеоморфизмы. Упорядоченный набор отображений $(g; f_1, \dots, f_k)$ будем называть гомоморфизмом топологической модели TM в $\overline{TM}$, если g есть непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство $\overline{X}$, такое что для любого $i \quad (i = \overline{1, k})$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X^{n_i} & \xrightarrow{g^{n_i}} & (\overline{X})^{n_i} \\ \downarrow r^{(n_i)} & & \downarrow \overline{r}^{(n_i)} \\ V_i & \xrightarrow{f_i} & \overline{V}_i \end{array}$$

где $g^{n_i}(y) = (g(y_1), g(y_2), \dots, g(y_{n_i}))$, $y \in X^{n_i}$

Определение 1.11. Пусть $TR = \langle X, W, U \rangle$ и $\overline{TR} = \langle \overline{X}, \overline{W}, \overline{U} \rangle$ - две однотипные топологические реляционные системы. $W = \{W_1, \dots, W_l\}$, где $W_i : X \rightarrow Z_i \quad (i = \overline{1, l})$, $U = \{U^{(n_1, m_1)}, \dots, U^{(n_k, m_k)}\}$, $U^{(n_j, m_j)} : X^{n_j} \times W^{m_j} \rightarrow V_j \quad (j = \overline{1, k})$; $\overline{W} = \{\overline{W}_1, \dots, \overline{W}_l\}$, где $\overline{W}_i : \overline{X} \rightarrow \overline{Z}_i \quad (i = \overline{1, l})$, $\overline{U} = \{\overline{U}^{(n_1, m_1)}, \dots, \overline{U}^{(n_k, m_k)}\}$, где $\overline{U}^{(n_j, m_j)} : (\overline{X})^{n_j} \times (\overline{W})^{m_j} \rightarrow \overline{V}_j \quad (j = \overline{1, k})$, отображения $f_i : V_i \rightarrow \overline{V}_i \quad (i = \overline{1, k})$, $g_j : Z_j \rightarrow \overline{Z}_j \quad (g = \overline{1, l})$, есть гомеоморфизмы топологических пространств $V_i, \overline{V}_i \quad (i = \overline{1, k})$ и $Z_j, \overline{Z}_j \quad (j = \overline{1, l})$. Упорядоченный набор отображений $(h; f_1, \dots, f_k; g_1, \dots, g_l)$ будем называть гомоморфизмом топологической реляционной системы TR в топологическую реляционную систему $\overline{TR}$, если для любых $j \quad (j = \overline{1, k})$ и $i \quad (i = \overline{1, l})$ коммутативны диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} X^{n_j} \times W^{m_j} & \xrightarrow{h^{n_j} \times d_j} & (\overline{X})^{n_j} \times \overline{W}^{m_j} \\ \downarrow U^{(n_j, m_j)} & & \downarrow \overline{U}^{(n_j, m_j)} \\ V_j & \xrightarrow{f_j} & \overline{V}_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & \overline{X} \\ \downarrow W_i & & \downarrow \overline{W}_i \\ Z_i & \xrightarrow{g_i} & \overline{Z}_i \end{array}$$

где $h^{n_j}(y) = (h(y_1), h(y_2), \dots, h(y_{n_j}))$, $y \in X^{n_j}$;

α_j - взаимно однозначное соответствие: $\alpha_j: W^{m_j} \rightarrow \overline{W}^{m_j}$,

h - непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство $\overline{X}$.

Непосредственным следствием определений 1.2 – 1.11 являются предложения 1.2 и 1.3.

Предложение 1.2. Категория однотипных реляционных систем характеристики $(l; (n_1, m_1), \dots, (n_k, m_k))$ является полной подкатегорией категории однотипных топологических реляционных систем, морфизмами которой служат гомоморфизмы однотипных топологических систем.

Предложение 1.3. Категория однотипных топологических моделей характеристики $(n_1, \dots, n_k)$ является полной подкатегорией категории однотипных топологических реляционных систем характеристики $(0; (n_1, 0), \dots, (n_k, 0))$.

§2. Топологические модели первого порядка

В настоящем параграфе рассматривается конструкция введения инициальной топологии на некотором множестве X , на котором заданы отображения $U_i: X \rightarrow Z_i$, $i = \overline{1, l}$, где Z_i есть некоторые топологические пространства. В результате путем, естественным для приложений, приходим к топологической модели первого порядка. Далее обсуждается связь семантики и структуры топологии в топологической модели первого порядка. Заметим, что понятия топологической модели первого порядка и топологической реляционной системы первого порядка совпадают.

Пусть X есть некоторое множество, на котором заданы отображения $U_i: X \rightarrow Z_i$, $i = \overline{1, l}$, где Z_i есть некоторое топологическое пространство (на практике обычно Z_i есть некоторое открытое или замкнутое подмножество в n_i -мерном векторном пространстве R^{n_i} , причем в Z_i топология τ_i индуцируется стандартной топологией в R^{n_i}). Построим на множестве X инициальную топологию, порожденную семейством отображений U_i .

Обозначим через σ_i прообраз семейства τ_i при отображении U_i . Тогда, приняв в качестве предбазы топологии в X объединение всех семейств σ_i , получим в X некоторую топологию σ , причем справедливо следующее

Предложение 2.1. Топология σ в X является слабой из всех таких топологий в X , при которых все отображения U_i ($i = \overline{1, l}$), непрерывны.

Предложение 2.2. $TM = \langle X, U \rangle$ является топологической моделью первого порядка.

Определение 2.1. Пусть $TM = \langle X, U \rangle$ - топологическая модель первого порядка, $U = \{U_1, \dots, U_l\}$, $U_i: (i = \overline{1, l})$ есть непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Z_i . Пусть Z есть декартово произведение то-

топологических пространств Z_i , $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_l$. Наделим Z тихоновской топологией. Определим отображение $F = U_1 \times \dots \times U_l$, $F: X \rightarrow Z$.

Подмножество $P = \text{im} F \subset Z$ с индуцированной топологией будем называть признаковым пространством топологической модели TM .

Пусть $x: P \rightarrow Z$ есть вложение топологического пространства P в топологическое пространство Z , $\lambda_i: Z = Z_1 \times \dots \times Z_l \rightarrow Z_i$ ($i = \overline{1, l}$) - проекция на i -тый сомножитель. Определим отображения $f_i: P \rightarrow Z_i$, $f_i = \lambda_i \circ \alpha$, тогда приходим к следующему предложению.

Предложение 2.3. $(TM)' = \langle P, f \rangle$, где P - признаковое пространство топологической модели TM , $f = \{f_1, f_2, \dots, f_l\}$, $f_i = \lambda_i \circ \alpha$, $f_i: P \rightarrow Z_i$, является топологической моделью первого порядка.

Доказательство: из определения 2.1. следует, что для любого i отображение f_i непрерывно, как композиция непрерывных отображений.

Из определения 2.1 и предложения 2.3 следует

Предложение 2.4. Пусть $TM = \langle X, U \rangle$ - топологическая модель первого порядка $(TM)' = \langle P, f \rangle$; тогда упорядоченный набор отображений $(F, (id)_1, \dots, (id)_l)$, где $F: X \rightarrow P$, $(id)_i: Z_i \rightarrow Z_i$ - тождественные отображения является гомоморфизмом топологической модели первого порядка TM в топологическую модель первого порядка $(TM)'$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 2.5. Топологическая модель первого порядка $(TM)'$ изоморфна топологической модели первого порядка $((TM)')'$.

Определение 2.2. Пусть $TM = \langle X, U \rangle$ - топологическая модель первого порядка, P - ее признаковое пространство, отображение $F: X \rightarrow P$ построено как в определении 2.1. Для любого элемента p из признакового пространства P обозначим $A(p) = (F)^{-1}(p)$, тогда $A(p)$ есть некоторое подмножество в X . Множество $SB = \{A(p)\}_{p \in P}$ будем называть семантическим базисом топологической модели первого порядка TM . Будем говорить, что два элемента x_1 и x_2 из множества X принадлежат одному типу, если $F(x_1) = F(x_2)$ или $x_1 \in \left(X \setminus \left(\bigcup_{p \in P} A(p) \right) \right) = A_0$ и $x_2 \in \left(X \setminus \left(\bigcup_{p \in P} A(p) \right) \right) = A_0$.

Предложение 2.6. Отношение принадлежности одному типу есть отношение эквивалентности на множестве X .

Предложение 2.7. Элементы семантического базиса являются замкнутыми подмножествами в топологическом пространстве X , если топология в признаковом пространстве хаусдорфова. Более того, если на множестве X топология введена так, как в предложении 2.1., то элементы семантического базиса являются минимальными замкнутыми подмножествами в X .

Роль семантического базиса в топологической модели первого порядка проясняется следующим предложением.

Предложение 2.8. Пусть $TM = \langle X, U \rangle$ - топологическая модель первого порядка. Любое непустое подмножество в X , которое можно описать с помощью теоретико – множественных операций посредством множества признаков $U_1, U_2, \dots, U_l$, $U_i \in U$, является объединением некоторого числа элементов семантического базиса и открытого множества $A_0 = X \setminus \bigcup_{p \in P} A(p)$, где P - признаковое пространство.

В заключение отметим, что конструкция, изложенная в настоящем параграфе, может быть обобщена на топологические реляционные системы n - го порядка, причем понятия признакового пространства и семантического базиса строятся индуктивно, что хорошо согласуется с иерархическим представлением ассоциативных и неассоциативных связей в информационной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
2. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. - М.: Наука, 1978. – 399с.
3. Еришов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1979. - 320с.
4. Кейслер Г.Д. Теория моделей. – М.: Мир, 1977. – 614с.
5. Кейслер Г.Д., Чен Чень –Чунь. Теория непрерывных моделей. - М.: Мир, 1971. – 184 с.
6. Кофман А. Введение в теорию нечетных множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432с.
7. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. – 416 с.
8. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
9. Норберт В. Кибернетика. – М.: Наука, 1983. – 340 с.
10. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. – М.: Радио и связь, 1982. – 151 с.
11. Грехем Р., Л., Кнут Д. Э., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2010 -784 с.
12. Матвеев О.А., Панишина А.В., Бочаров В.Е. О топологических реляционных системах. // Материалы XI конференции молодых ученых, М.: УДН, 1988, с. 110-121. Деп. в ВИНТИ № 5305 –В88.

TOPOLOGICAL RELATIONAL SYSTEMS

O. Matveyev

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. In this paper the topological relational systems for a modeling different subject fields are introduced. The formalization procedure for the determination of the type of an object in the subject field indication space is taken.

Key words: relation system, topology, semantic basis, models.
УДК 514.76/+512.54