УДК.533.72

ЭВОЛЮЦИЯ ГАЗОДИСПЕРСНОГО ОБЛАКА С ВЯЗКОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗОЙ В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ

А.Н. Голов

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а

Аннотация. Найдена нестационарная статистическая функция распределения для микроскопической модели системы дисперсных частиц в квазинепрерывной вязкой среде и в поле потенциальных сил. Получено выражение плотности облака дисперсных частиц, эффективно представляемого квазинепрерывной средой в смысле кинетической теории. Выявлены основные закономерности эволюции широкого плоского облака.

Ключевые слова: нестационарная статистическая функция распределения, микроскопическая модель, дисперсные частицы, вязкая среда, поле потенциальных сил.

В данной статье рассмотрим случай, объединяющий ранее рассмотренные по отдельности случаи эволюции облака дисперсных частиц в вакууме под действием внешнего потенциального поля и эволюции газодисперсного облака с вязкой газовой фазой в отсутствие внешних полей [1, 2]. Мы используем статистико-механический подход, основанный на решении удлинённого уравнения Лиувилля – Гиббса (УЛГ) для данной системы многих частиц [3]. Примем микроскопическую модель системы однородных дисперсных частиц, не взаимодействующих между собой, которые движутся в газовой среде с вязким трением, во внешнем потенциальном поле («запылённый газ»). Здесь мы рассматриваем, как интересующую нас систему, именно множество дисперсных частиц. Эффективно квазинепрерывную среду, в которой они находятся, рассматриваем, как распределённый в пространстве термостат. Для этого случая положим, что общая масса всех дисперсных частиц $M = Nm \ll M_T$ (M_T – масса термостата, N – число частиц, $m_i = m$ – масса частицы), так что движение частиц не изменяет существенно термодинамического состояния и свойств среды. Мы также примем, что объём термостата V весьма велик, и геометрические ограничения на движение частиц несущественны. Практически это приемлемо, когда концентрация частиц достаточно быстро убывает к границе системы. Тогда можно пренебречь собственным объёмом частиц $NV_0 \ll V$ (V_0 – объём одной частицы). Но при рассмотрении движения частиц считаем их размеры конечными, так что на них действуют конечные силы вязкого трения. Далее считаем $N = \text{const}$, и $m = \text{const}$. Частицы примем нелетучими, бесструктурными, полагая, что их внутренние степени свободы не возбуждаются, а их столкновения друг с другом – упругие. Пусть на все однородные частицы действуют потенциальные силы f_i . В простейшем случае примем поле однородным и постоянным, т. е. рассматриваем такие пространственные и временные масштабы, в которых неоднородностью поля и его изменением со временем можно пренебречь. Далее, распространяя интегралы на неограниченное пространство, предполагаем, что численная ошибка будет мала, когда подинтегральные функции достаточно быстро убывают к границам области интегрирования.

Пусть $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}$ не зависит от номера частицы i . Система в целом не вращается. Задача заключается в выяснении влияния внешнего поля и свойств среды на статистическое описание системы частиц, а через него – на её макроскопическое описание. При наличии поля задача существенно нестационарная. Выберем лабораторную систему отсчёта с началом в центре масс при $t = 0$. Систему координат выберем, направив OZ вдоль действующей силы $\mathbf{f}$, пользуясь либо декартовой, либо цилиндрической СК. Силы, действующие на частицы со стороны среды, зададим в приближении Стокса:

$$\mathbf{Q}_i = -\kappa \dot{\mathbf{q}}_i \equiv -\nu \mathbf{p}_i, \quad (1)$$

где стоксов коэффициент κ зависит от вязкости среды, размеров и формы частицы ($\nu = \kappa/m$), так что рассматривается случай малых чисел Рейнольдса. Для однородных частиц коэффициенты в (1) одни и те же при любом i .

Силы вида (1) — неконсервативные, вследствие чего обычное УЛГ, исходящее из уравнений динамики консервативных систем, не включающих диссипативные силы, не может быть применено в данном случае. Для адекватного описания исследуемых явлений, необходимо использовать удлинённое УЛГ. Из последнего для модели системы, состоящей из 2-х подсистем, следуют многочастичные кинетические уравнения для этих подсистем [3, 4]. Когда подсистемы могут рассматриваться, как статистически независимые, то и уравнения для них независимы. Уравнение, описывающее термостат, в данном случае несущественно, т. к. предполагается, что частицы слабо возмущают состояние среды, которое считаем заданным. Уравнение для N -частичной плотности вероятности подсистемы дисперсных частиц в этом приближении имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \hat{L}F + \frac{\partial F}{\partial a_\mu} \dot{a}_\mu = -(\lambda D + g)F, \quad (2)$$

где стационарный лиувиллиан ($i = 1 \dots 3N$):

$$\hat{L} = \frac{p_i}{m} \frac{\partial}{\partial q_i} + \left(f_i - \frac{\kappa p_i}{m} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (3)$$

причём потенциальные силы f_i имеют только z -составляющие; диссипанта (мощность диссипативных сил) $D = -\kappa p_i p_i / m^2$; a_μ – макропараметры состояния; $\lambda = 1/\Theta$ (Θ – модуль распределения) и g не зависят от фазовых переменных. Здесь и далее в формулах принято правило тензорной алгебры, согласно которому подразумевается сумма по всем значениям повторяющихся индексов. Решение уравнения (2) в классе квазигиббсовых распределений ищем в виде:

$$F = \prod_{i=1}^N F_{1i}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, a_\mu, t). \quad (4)$$

Тогда из уравнения (2) получим уравнения для 1-частичных функций F_{1i} , решения которых находим методом интегралов однородного лиувиллиана [1 – 3 и др.]. Представив

$$F_1 = F_{12}(q_\alpha, p_\alpha, t) \cdot F_3(q_3, p_3, t) \quad (5)$$

(индекс i опущен, $\alpha=1, 2$), можем разделить переменные. По осям X и Y поле не действует, и функция F_{12} соответствует 2-мерному случаю решения, полученного в [1], которое можем использовать и здесь. Новые закономерности получим для зависимости $F_3(q_3, p_3, t)$ ($q_3 \equiv z$). Эта функция может быть записана в казигиббсовом виде:

$$F_3 = \frac{1}{Z_3} \cdot \exp(-\eta_\lambda) , \quad (6)$$

где статистический интеграл $Z = Z(t)$ не зависит от фазовых переменных, но в общем случае может зависеть от макропараметров и времени. Из условия нормировки, имеем:

$$Z_3 = \int_{\Omega} \exp(-\eta_\lambda) dp_3 dq_3 , \quad (7)$$

где интеграл берётся по заданной области Ω на фазовой плоскости p_3, q_3 . Показатель вероятности в (6):

$$\eta_\lambda = k_6 p_3^2 + k_2 p_3 + k_3 p_3 q_3 + k_7 q_3 + b q_3^2 + k_5 , \quad (8)$$

где (и далее):

$$k_1 = (a + b / \kappa^2 + c / \kappa) \cdot et^2 - (2b / \kappa^2 + c / \kappa) \cdot et + b / \kappa^2 ; \quad (9)$$

$$k_2 = -2 \cdot (af\tau + cf\tau / \kappa + bf\tau / \kappa^2) \cdot et^2 + (2af\tau + 3cf\tau / \kappa + 4bf\tau / \kappa^2 + cft / \kappa + 2bft / \kappa^2) \cdot et - cf\tau / \kappa - 2bf\tau / \kappa^2 - 2bft / \kappa^2$$

$$k_3 = 2b / \kappa - (c + 2b / \kappa) \cdot et$$

$$k_4 = (cf\tau + 2bf\tau / \kappa) \cdot (et - 1) - 2bf\tau / \kappa$$

$$k_5 = (af^2\tau^2 + cf^2\tau^2 / \kappa + bf^2\tau^2 / \kappa^2) \cdot (et - 1)^2 - (cf^2t\tau / \kappa + 2bf^2t\tau / \kappa^2) \cdot (et - 1) + bf^2t^2 / \kappa^2$$

$$k_6 = k_1 + h; \quad k_7 = k_4 - 2mhf; \quad (h = \lambda / 2m); \quad k_8 = k_6 - k_3^2 / 4b = (a - c^2 / 4b) \cdot et^2 + h;$$

суть функции времени, $\tau = m / \kappa$ и обозначено $\exp(t / \tau) \equiv et$. Выше и далее a, b, c – константы задачи, подлежащие определению из дополнительных условий. Решение (6) при действительных параметрах и константах задачи удовлетворяет требованиям, предъявляемым к плотности вероятности, и асимптотическим граничным условиям обращения решения в нуль. Член k_5 в (8) не зависит от фазовых переменных, так что множитель

$\exp(-k_5)$ в подинтегральном выражении (7) можно вынести за интеграл и сократить с таким же множителем в числителе. Поэтому удобно пользоваться укороченным выражением (8), где слагаемое k_5 опущено, и соответственно вычислять интеграл (7). Такой сокращённый интеграл имеет вид:

$$Z_3 = \frac{\pi}{\sqrt{bk_8}} \cdot \exp\left(\frac{4bk_7^2k_8 + 4b^2k_2^2 - 4bk_2k_3k_7 + k_3^2k_7^2}{16b^2k_8}\right), \quad (10)$$

Учитывая обозначения выше, видим, что (10) является весьма сложной функцией времени. В случае $f = 0$ выражение (10) приводится к статистическому интегралу по одной из фазовых плоскостей, найденному в [1]. При $\kappa \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ приходим к выражению, найденному в [2]. Аналогичные предельные переходы к указанным частным случаям имеем для η_λ и F_3 , так что выполняется принцип соответствия.

Из найденной плотности вероятности получим частные распределения по импульсам и координатам. Для распределения в плоскости XY (и по соответствующим проекциям импульса), получим 2-мерные распределения, аналогичные найденным в [1]:

$$F_{12}(p_\alpha, t) = \frac{A_t \pi}{b} \cdot \exp\left[-\frac{(4abU - K^2) \cdot p^2}{4b}\right] + \frac{A_0 \pi}{a_0 \kappa^2} \cdot \exp(-hp^2), \quad (11)$$

$$F_{12}(q_\alpha, t) = \frac{A_t \pi}{aU} \cdot \exp\left[-\frac{(4abU - K^2) \cdot q^2}{4aU}\right] + \frac{A_0 \pi}{a_0 + h} \cdot \exp\left(-\frac{a_0 h \kappa^2 q^2}{a_0 + h}\right). \quad (12)$$

Здесь: $p^2 = p_1^2 + p_2^2$; $q^2 = q_1^2 + q_2^2$; A_0, A_t – нормировочные множители для 2-мерного случая.

$$U = (1 + c / a\kappa + b / a\kappa^2) \cdot et^2 - (c / a\kappa + 2b / a\kappa^2) \cdot et + b / a\kappa^2 + h / a ;$$

$$K = [(c + 2b / \kappa) \cdot et - 2b / \kappa] .$$

Новые закономерности получим в зависимости от p_3, q_3 (ниже – без индексов для сокращения записи). Находим 1-частичное распределение по импульсам:

$$F(\mathbf{p}_i, t) = F_{12}(p_\alpha, t) \cdot \sqrt{\frac{k_8}{\pi}} \cdot \exp\left[-k_8 \cdot (p - \bar{p})^2\right]. \quad (13)$$

Формула (13), приведённая к простому виду, содержит сложную зависимость от времени, входящую через выражения k_8 и

$$\bar{p} = \frac{k_3 k_7 - 2b k_2}{4b \cdot [(a - c^2 / 4b) \cdot et^2 + h]}. \quad (14)$$

Т. о., имеем распределение по p_3 с зависящим от времени модулем $1/k_8$ и центром, смещающимся со временем по закону (14). В соответствующих частных случаях имеем

переходы к результатам [1] и [2]. Т. к. k_8 неограниченно растёт со временем, то модуль распределения $\rightarrow 0$. При $t = 0$ по аналогии с распределением Максвелла можем связать модуль распределения с начальной эффективной «температурой» облака Θ_0 :

$$\Theta_0 = [2am \cdot (w + \xi)]^{-1}, \quad (15)$$

где $\xi = h/a$; $w = 1 - c^2/4ab$. Когда Θ_0 задано и константы задачи определены, (15) можно использовать для определения ξ или параметра h . Θ_0 надо понимать в смысле «продольной» температуры [5]. Известное в газодинамике «вымораживание» продольной температуры трактуется здесь, как уменьшение дисперсии импульсного распределения вследствие подавления хаотического движения частиц по OZ. При этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t) = f\tau.$$

Этот асимптотический результат известен в теории седиментации, где он следует для более простой зависимости от времени без учёта статистических закономерностей и пространственной неоднородности. Средний импульс частицы (z-проекция):

$$\langle p_3 \rangle = \bar{p}.$$

Распределение по координатам приводится к виду:

$$F(\mathbf{q}, t) = F_{12}(q_\alpha, t) \cdot \sqrt{\frac{bk_8}{\pi k_6}} \cdot \exp\left[-\frac{bk_8 \cdot (q - \bar{q})^2}{k_6}\right].$$

Соотношение (16) есть распределение с переменным модулем k_6 / bk_8 , центр которого:

$$\bar{q} = \frac{2k_6 k_7 - k_2 k_3}{4bk_8}. \quad (17)$$

В отсутствие поля имеем $\bar{q} = 0$. В случае невязкой среды, как и в [2], имеем:

$$\bar{q} = ft^2 / 2m.$$

Величина (17) неограниченно растёт со временем, в асимптотике – линейно. Средние по распределению (16) значения:

$$\langle q_3 \rangle = \bar{q};$$

$$\langle q_3^2 \rangle = \bar{q}^2 + k_6 / 2bk_8;$$

Так что общее выражение дисперсии:

$$\langle q_3^2 \rangle - \langle q_3 \rangle^2 = k_6 / 2bk_8 . \quad (18)$$

Соотношение (18) в соответствующих частных случаях переходит в выражения, найденные в [1] и [2]. Со временем дисперсия изменяется от значения $4 \cdot (a+h) / (4ab - c^2 + 4bh)$ до конечного асимптотического значения $4 \cdot (ak^2 + ck + b) / [k^2 \cdot (4ab - c^2)]$.

Зная выражение F_{12} и функцию (6), тем самым определим 1-частичную функцию (5) и N -частичную функцию (4). Перейдём, согласно кинетической теории [6 и др.], к описанию облака дисперсных частиц в представлении квазинепрерывной среды. Находим эффективную плотность дисперсной фазы:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = Nm\rho_{xy}(x, y, t) \cdot \sqrt{\frac{bk_8}{\pi k_6}} \cdot \exp\left[-\frac{bk_8 \cdot (z - \bar{z})^2}{k_6}\right], \quad (19)$$

где

$$\rho_{xy}(x, y, t) = \frac{A_0 \pi}{aU} \cdot \exp\left[-\frac{(4abU - K^2) \cdot r_{xy}^2}{4aU}\right] + \frac{A_0 \pi}{a_0 + h} \cdot \exp\left(-\frac{a_0 h k^2 r_{xy}^2}{a_0 + h}\right), \quad (20)$$

причём: $r_{xy}^2 = x^2 + y^2$ и $\bar{z} = \bar{q}$ (см. (17)). Для выяснения начального и текущего распределения плотности рассматриваем (19) в смысле совместного распределения [7 и др.]. Следуя [8], аналогично [1. 2], введём начальные и текущие координаты частицы:

$$x = x_0 + x_t; \quad y = y_0 + y_t; \quad z = z_0 + z_t .$$

Для последующих выкладок нужно определить начальные условия, задав область начальных значений x_0, y_0, z_0 для рассматриваемой конкретной задачи. Для определённости, примем модель широкого плоского облака, однородно заполняющего в начальный момент весьма широкий слой толщиной $2L$, так что $z_0 \in [-L, L]$. Такая модель (без учёта вязкой среды) была рассмотрена в [9 – 11]. Примем исходное облако настолько широким, что интегралы по x_0 и y_0 , вычисленные в конечных пределах, численно весьма близки к таковым, вычисленным в бесконечных пределах. Это обеспечивается весьма быстрым убыванием функции (20) с ростом x_0 и y_0 . Тогда краевые эффекты в плоскости ХОУ можно не рассматривать. В этом случае начальная плотность:

$$\langle \rho \rangle = Nm / V_0 \cdot \check{A}(x_0, y_0 \in S) \cdot \check{A}(z_0, (-L, L)) , \quad (21)$$

где $\check{A}(x_0, y_0 \in S)$ – 2-мерная функция, равная 1 в области S и нулю – вне неё [12].

$$\check{A}(z_0, (-L, L)) = \begin{cases} 1 & \text{ï ðè } z_0 \in [-L, L] \\ 0 & \text{ï ðè } z_0 \notin [-L, L] \end{cases} .$$

Распределение плотности дисперсной фазы в текущем состоянии:

$$|\rho\rangle = \frac{\rho_0}{2} \cdot \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(\bar{z} - z_t + L)}{\lambda} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{(\bar{z} - z_t - L)}{\lambda} \right] \right\}, \quad (22)$$

где $\rho_0 = Nm / V_0$, $\lambda = (b \cdot k_8 / k_6)^{-1/2}$. Концентрация дисперсных частиц:

$$|n\rangle = \frac{n_0}{2} \cdot \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(\bar{z} - z_t + L)}{\lambda} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{(\bar{z} - z_t - L)}{\lambda} \right] \right\}, \quad (23)$$

где $n_0 = N / V_0$ должно быть достаточно мало, чтобы можно было пренебречь собственным объёмом и взаимодействием частиц. Для любого t выполняется условие:

$$\iiint_{V_t} |n\rangle \cdot dV_t = N.$$

В отсутствие поля формулы (22) и (23) приводятся к виду, найденному в [1]. Для невязкой среды получим те же результаты, что в [2]. Сложная зависимость полученных выше формул от времени выявляется подстановкой обозначений (9) (выражение не приводится ввиду его громоздкости). Среднее по распределению массы облака в текущем состоянии значение координаты $\langle z_t \rangle = \bar{z}$. При этом:

$$\langle z_t \rangle(t=0) = \frac{afm\xi \cdot (1+\xi)}{b \cdot (w+\xi)}, \quad \langle z_t \rangle(t \rightarrow \infty) \rightarrow ft / \kappa, \quad (24)$$

где $f/\kappa = v_\infty$ – известное выражение скорости седиментации. Дисперсия (22):

$$D_{z_t} = \frac{L^2}{3} + \frac{(a+b/\kappa^2+c/\kappa) \cdot et^2 - (2b/\kappa^2+c/\kappa) \cdot et + b/\kappa^2 + h}{2b \cdot [(a-c^2/4b) \cdot et^2 + h]}. \quad (25)$$

Отсюда видно, что дисперсия не зависит от поля, а создаётся только хаотическим движением и определяется начальным состоянием облака, свойствами частиц и среды. По ходу эволюции облака дисперсия ограниченно изменяется от начального значения

$$D_{z_0} = \frac{L^2}{3} + \frac{1+\xi}{2b \cdot (w+\xi)}, \quad (26)$$

(не зависящего от вязкости среды), до асимптотического значения:

$$D_{z_\infty} = \frac{L^2}{3} + \frac{a\kappa^2 + b + c\kappa}{2abw\kappa^2}, \quad (27)$$

(не зависящего от параметра h). При неотрицательных значениях констант задачи и параметров величина (25) возрастает со временем.

Итак, решение данной задачи, включая переход к макроскопическому описанию, может быть доведено до конца в аналитическом виде без каких-либо вычислительных приближений. Последние, однако, появятся при нахождении констант задачи из начальных условий, т. к. эти константы определяются из трансцендентных уравнений, как показано в [11] (где даны профили и графики плотности, плотности потока вещества и плотности энергии для квазинепрерывного облака дисперсных частиц). Найденные решения уравнения (2) описывают эволюцию облака, как результат суперпозиции направленного и хаотического движения частиц. Полученные формулы показывают, что эволюция многочастичной системы определяется тремя основными факторами: 1) хаотическим движением частиц; 2) действием внешнего поля; 3) действием термостабилизирующей вязкой среды. Переход к случаю [2] производится пределом $\kappa \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$. Переход к случаю [1] имеем при $f \rightarrow 0$. В принятой выше модели движение дисперсных частиц разделяется на «продольное» и «поперечное» движения. Второе из них – хаотическое, в первом присутствует направленная составляющая. Все найденные статистические распределения — нестационарные. Выражения плотности (22) и концентрации (23) для модели плоского широкого облака также описывают нестационарные состояния с переменной дисперсией и максимумом, движущимся с переменной скоростью вдоль направления поля. Найденные выражения могут быть использованы в различных практически интересных приложениях, например, для описания переноса массы при осаждении облака. Известные формулы теории седиментации естественно следуют из полученных выше в асимптотическом пределе, причём не для скоростей или координат отдельных частиц, а для средних статистических значений. Т. о., изложенный подход позволяет обобщить теорию седиментации, включая в рассмотрение статистический разброс, случайные факторы, пространственную неоднородность системы и отклонение распределения скоростей дисперсных частиц от максвелловского. Изложенная теория позволяет включать в рассмотрение различные потенциальные поля, а также центробежные силы, силы Архимеда и другие. Для пространственно-однородных сил обобщение теории получается наиболее просто, добавлением их в формально введённую силу $\mathbf{f}$. В этом случае сохраняется структура всех проделанных выкладок, так что достаточно подставить суперпозицию всех учитываемых сил в окончательные выражения. Например, для учёта силы Архимеда следует подставить

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g} - \rho_c V_c \mathbf{g} ,$$

где ρ_c – плотность среды, V_c – объём частицы.

Ввиду наличия сил двух типов (потенциальных и диссипативных) обнаруживаются два характерных масштаба времени. Один из них $\tau_f = am/c$ – тот же, что в [2, 10] и характерен для свободного расширения газоподобных систем. Другой масштаб $\tau = m/\kappa$ естественно возникает вследствие наличия вязкой среды. Зависимости полученных выше формул от времени весьма сложные, и, в общем случае, явное отделение членов, содержащих разные масштабы времени, не всегда возможно. Оценка τ_f (см. [11]) показывает, что для модели широкого плоского облака этот масштаб на несколько порядков больше τ и зависит от начальной толщины облака. Масштаб τ обычно входит в экспоненты e^t . При $t \ll \tau$ экспоненты аппроксимируются первыми членами разложения в ряд, и поведение функционалов приближённо описывается степенными функциями. На следующем этапе включаются сильные экспоненциальные зависимости, описывающие

процессы релаксационного типа. Далее изменение исследуемых величин замедляется и они при $t \gg \tau$, либо стремятся к постоянным значениям, либо обнаруживают асимптотическое стремление к степенным функциям времени. Характерный пространственный масштаб связан с константой b . Для обезразмеривания пространственных зависимостей можно использовать постоянный масштаб $\lambda_0 = b^{-1/2}$. Однако, в полученные выше нестационарные выражения входит переменный масштаб λ , определённый выше, который в ходе процесса изменяется в ограниченных пределах. Для широкого плоского облака конечной толщины в формулах появляется второй пространственный масштаб – начальная полутолщина облака L . От соотношения λ и L зависит соотношение различных членов формул и ход кривых в конкретных случаях при общей аналитической закономерности. Пространственные зависимости (22) и (23), в сущности, уже выражены через безразмерные аргументы. Например, концентрация записывается в виде:

$$|n\rangle = \frac{N_0}{4L} \cdot \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{L}{\lambda} \cdot (\langle \tilde{z} \rangle - \tilde{z}_i + 1) \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{L}{\lambda} \cdot (\langle \tilde{z} \rangle - \tilde{z}_i - 1) \right] \right\}, \quad (28)$$

где $N_0 = N/S$ и безразмерные величины: $\tilde{z}_i = z_i/L$; $\langle \tilde{z} \rangle = \langle z_i \rangle/L \equiv \bar{z}/L$. Отсюда очевидна инвариантность фигурной скобки в (28) относительно выбора единиц длины. Когда для графического представления желательно иметь безразмерными сами представляемые функции, удобно использовать приведённые функции, получаемые делением представляемой функции на её масштабное значение. Таковым можно выбрать значение функции в т. 0 при $t = 0$, которое для всех используемых функций конечно и положительно. Для широкого плоского облака приведённая безразмерная концентрация:

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{L}{\lambda} \cdot (\langle \tilde{z} \rangle - \tilde{z}_i + 1) \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{L}{\lambda} \cdot (\langle \tilde{z} \rangle - \tilde{z}_i - 1) \right] \right\}. \quad (29)$$

Для графического анализа результатов удобно ввести новую безразмерную константу s так, что $a = bs^2/\kappa^2$, $c = bs/\kappa$ и выбрать специальную систему единиц, в которой $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $w = 3/4$. Тогда поведение функций зависит от значений двух параметров — s и ξ , которые должны определяться из дополнительных условий. В частности, имеем:

$$\langle z \rangle = \frac{fm \cdot \left[(s^2\xi + \xi + s\xi + 3\tilde{t}/4 - 3/4) \cdot \operatorname{er}^2 - (3\xi + 3s\xi/2 - 3/4) \cdot \operatorname{er} + \xi \cdot (s^2\xi + 2 + s/2 + \tilde{t}) \right]}{\kappa^2 \cdot (3 \cdot \operatorname{er}^2/4 + \xi)}, \quad (30)$$

где параметры f , m , κ , ξ заданы условием, и произвольно только s ($\tilde{t} = t/\tau$, $\operatorname{er} = \exp(\tilde{t})$). Графическое исследование (30) на ЭВМ показывает, что для достаточно крупных частиц в газе, в силовом поле порядка земного поля тяжести, после короткого времени порядка нескольких τ устанавливается практически линейный закон изменения $\langle z \rangle$. Для $s > 1$ асимптотическая скорость изменения $\langle z \rangle$ весьма мала. Большие её значения имеем для $s < 1$. Существенна зависимость асимптотической скорости от силы. Эволюцию эффективной толщины облака описывает изменение среднего квадратичного отклонения координаты z от среднего значения (далее – СКО). Относительное СКО (в долях L) при введённых выше обозначениях приводится к виду:

$$\delta = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{(w + \xi) \cdot [(s^2 + s + 1) \cdot et^2 - (s + 2) \cdot et + s^2 \xi + 1]}{3s^2 \cdot (1 + \xi) \cdot (w \cdot et^2 + \xi)} \right\}^{1/2}, \quad (31)$$

и вполне определяется параметрами s и ξ . Общей закономерностью является ограниченное возрастание СКО со временем, причём короткий релаксационный этап сменяется медленным приближением к асимптотическому значению. При $s = 10$ возрастание СКО незначительно и может составлять 0,1 – 0,01 начального значения, т. е., седиментация облака происходит относительно компактным слоем. При $s = 0,1$ СКО возрастает на порядок, так что облако значительно «размазывается» по z . Зависимость от ξ существенно влияет на поведение функции при $t \sim \tau$, далее же проявляется лишь в различии асимптотических значений. Зависимость приведённой концентрации (29) от времени определяется подстановкой в это выражение функций $\langle \tilde{z} \rangle(t)$ и $\lambda(t)$. Поскольку общий вид их известен, концентрация $|n\rangle(z, t)$ вполне определена данными условиями и значениями параметров и констант задачи. При $t \rightarrow 0$ получим начальные профили концентрации, заметно отличающиеся для тонкого и толстого слоёв ($L = 1$ и $L = 10$ соответственно, в условных единицах $b^{-1/2}$). Для толстого слоя имеем характерные платообразные кривые, форма которых слабо зависит от значений параметров. В обоих случаях обнаруживаем начальный сдвиг центра распределения, возрастающий с увеличением значений f и ξ . Модели с малым начальным сдвигом центра распределения соответствуют значениям $\xi \sim 1$ и менее. Графическое исследование эволюции профилей со временем на ЭВМ показывает, что для тонкого слоя на коротком начальном этапе (при $\xi = 1$) происходит быстрое релаксационное изменение профиля, после чего его долговременная эволюция, главным образом, выражается в движении максимума при слабом изменении дисперсии распределения. Толстый слой мало изменяется на релаксационном этапе, слабо деформируется и размывается со временем, и движется компактной массой с резко очерченными границами. Характерной закономерностью зависимости концентрации от времени (при заданных $\tilde{z} > 0$) является прохождение максимумов концентрации, приблизительно соответствующее движению средней плоскости облака. Обнаруживается значительная разница графиков для тонкого и толстого слоёв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голов А. Н., Яламов Ю. И. Нестационарные статистические распределения дисперсных частиц в вязкой среде. //Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика», №3–4, с. 22 – 30, 2008.
2. Голов А. Н., Харитонов А. П. Эволюция газоподобной системы многих дисперсных частиц в потенциальном поле. //Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика», №3–4, с. 12 – 21, 2008.
3. Яламов Ю. И., Голов А. Н. «Статистикомеханические методы в теории неравновесных молекулярных и дисперсных систем», деп. рукопись, ВИНТИ, №2423-В92, М., МПУ, 280 с. 1992.

4. Яламов Ю. И., Голов А. Н. – Многочастичное кинетическое уравнение для двух взаимодействующих подсистем. // «Механика и физическая кинетика дисперсных систем», с. 2 – 12, ВИНТИ, № 8113-В88, М., МПУ, 1988.
5. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: «Мир», 1981, 320 с.
6. Гуров К. П. Основания кинетической теории. М.: «Наука», 1966. 351 с.
7. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. // Теория вероятностей. М.: «Наука», 1973. 494 с.
8. Голов А. Н. Учёт начального состояния в нестационарном решении уравнения Лиувилля для свободно расширяющегося газа. ВИНТИ № 3303-В95, М., МПУ, 8 с., 1995.
9. Голов А. Н. Нахождение полей плотности, образуемых диспергированием протяжённых тел в вакууме. – 7 с., - Деп. рукопись, ВИНТИ № 121 - В2002, М., МПУ, 2002.
10. Яламов Ю. И., Голов Ю. И. Эволюция облака, созданного быстрым распылением широкой пластины в вакууме.// Труды Центра фундаментальных научных исследований МГОУ, № 1, с. 15 – 26, М., Издательство МГОУ, 2005.
11. Голов А.Н., Харитонов А.П. Эволюция плоского газоподобного облака в потенциальном поле. ВИНТИ. № 621 – В2008, 21 с., М., МГОУ, 2008.
12. Терлецкий Я. П. Статистическая физика. «Высшая школа», М. 1973.

EVOLUTION GAS-DISPERSED CLOUDS WITH A VISCOUS GAS PHASE IN THE FIELD OF POTENTIAL FORCES.

A. Golov

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. For microscopic model of system of disperse particles non-stationary statistical function of distribution is found in the quasicontinuous viscous environment and in the field of potential forces. Expression of density of a cloud of the disperse particles effectively represented by the quasicontinuous environment in sense of the kinetic theory is received. The basic laws of evolution of a wide flat cloud are revealed.

Keywords: non-stationary statistical function of distribution, microscopic model, disperse particles, viscous environment, field of potential forces.