

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

ОБОБЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ,
АССОЦИИРОВАННОГО С БИКРУГОМ

А.В. Нелаев

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. Рассматривается обобщение интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом. Основное внимание уделено вскрытию обобщенно-аналитических свойств рассматриваемого интеграла вне бикруга.

Ключевые слова: Интеграл Коши, бикруг.

1. Статья относится к разрабатываемой теории обобщений интеграла типа Коши. Будем придерживаться следующих обозначений областей пространства C^2 двух комплексных переменных $z = (z_1, z_2): U^2 \equiv U^{++} = \{(z_1, z_2): |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ (единичный бикруг), $U^{--} = \{(z_1, z_2): |z_1| > 1, |z_2| > 1\}$, $U^{+-} = \{(z_1, z_2): |z_1| < 1, |z_2| > 1\}$, $U^{-+} = \{(z_1, z_2): |z_1| > 1, |z_2| < 1\}$ (образы этих областей удобно иллюстрировать в «абсолютной четвертьплоскости», координатами которой являются $|z_1|$ и $|z_2|$). Через T^2 обозначим остов бикруга U^2 - единичный тор $T^2 = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in C^2: |\zeta_1| = 1, |\zeta_2| = 1\}$.

Одно из установленных И.И.Бавриным (см., напр., [1]) интегральных представлений голоморфных функций состоит в следующем:

Пусть функция $f(z_1, z_2)$ голоморфна в бикруге U^2 и непрерывна вместе со своими частными производными $f'_{z_1}(z_1, z_2)$ и $f'_{z_2}(z_1, z_2)$ в замыкании $\overline{U^2}$, а

$$L_{\beta, z^0}[f(z_1, z_2)] \equiv \beta f(z_1, z_2) + \delta_1(z_1 - z_1^0)f'_{z_1}(z_1, z_2) + \delta_2(z_2 - z_2^0)f'_{z_2}(z_1, z_2),$$

где β - любое положительное число с условием $\beta \geq 1$, δ_1 и δ_2 - любые неотрицательные числа с условием $\delta_1 + \delta_2 > 0$, (z_1^0, z_2^0) - фиксированная по произволу точка из U^2 . Тогда для $(z_1, z_2) \in U^2$

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 \tau^{\beta-1} d\tau \int_{T^2} \frac{L_{\beta, z^0}[f(\zeta_1, \zeta_2)] d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)(\zeta_2 - u_2)}, \quad (1)$$

где $u_1 = \tau^{\delta_1} z_1 + (1 - \tau^{\delta_1}) z_1^0$, $u_2 = \tau^{\delta_2} z_2 + (1 - \tau^{\delta_2}) z_2^0$.

Аналогично тому, как на базе интегральной формулы Коши для бикруга вводится в рассмотрение интеграла типа Коши:

$$\Psi(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T^2} \frac{\phi(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}, \quad (2)$$

(подробно исследованный В.А. Какичевым – см., напр., в [2]. Отметим, что интеграл (2) определяет функции $\Psi^{++}(z_1, z_2)$, $\Psi^{-+}(z_1, z_2)$, $\Psi^{+-}(z_1, z_2)$, $\Psi^{--}(z_1, z_2)$ голоморфные соответственно в областях U^2 , U^{-+} , U^{+-} , U^{--} . При рассмотрении интеграла (2) на границе и вне бикруга U^2 в тех случаях, когда $|z_1| = 1$, или $|z_2| = 1$, или и $|z_1| = 1$ и $|z_2| = 1$, соответствующие особые интегралы по ζ_1, ζ_2 и двойной особый интеграл существуют в смысле главного значения по Коши – это гарантируется накладываемым на плотность $\phi(\zeta_1, \zeta_2)$ условием Гельдера), рассмотрим строящийся на основе интегрального представления (1) интеграл

$$\tilde{F}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{T^2} \frac{\phi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)(\zeta_2 - u_2)}, \quad (3)$$

где плотность $\phi(\tau, \zeta_1, \zeta_2)$ - непрерывная по совокупности переменных функция (уже не двух, а трех переменных!), удовлетворяющая условию Гельдера:

$$|\phi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) - \phi(\tau, \zeta_1^0, \zeta_2^0)| < A_1 |\zeta_1 - \zeta_1^0|^{\alpha_1} + A_2 |\zeta_2 - \zeta_2^0|^{\alpha_2}, \quad (4)$$

причем константы $A_k > 0$ и показатели α_k ($0 < \alpha_k \leq 1$) не зависят от τ .

Поведение функций, определяемых интегралом (3), характеризуют, прежде всего, следующие две теоремы.

Теорема 1. Интеграл (3) голоморфен в бикруге U^2 и, кроме того, в области U^{+-} - если $\delta_2 = 0$, или в области U^{-+} - в случае $\delta_1 = 0$.

Теорема 2. В области U^{--} и в областях U^{-+} (при $\delta_1 > 0$) и U^{+-} (при $\delta_2 > 0$) интеграл (3) представляет собой непрерывные, не голоморфные, вообще говоря, но любое число раз дифференцируемые (в вещественном смысле) функции.

Доказательство теоремы 1 основывается на том факте, что всюду в U^2 тождественно по всем τ ($0 \leq \tau \leq 1$) выполняются неравенства $|u_1| < 1$ и $|u_2| < 1$; если $\delta_2 = 0$, то в области U^{+-} справедливы неравенства $|u_1| < 1$ и $|u_2| \equiv |z_2| > 1$; если же $\delta_1 = 0$, то в области U^{-+} выполняются неравенства $|u_1| \equiv |z_1| > 1$ и $|u_2| < 1$.

Справедливость теоремы 2 опирается, во-первых, на то, что непрерывность может нарушаться лишь в том случае, если (при фиксированном z_v) равенство $|u_v| = 1$ выполняется на множестве изменения параметра τ ненулевой меры. А этого нет. Далее, вид формул перехода в (3) от кратного интегрирования к повторному (которые мы опускаем) свидетельствует о не голоморфном, вообще говоря, характере поведения определя-

емых интегралом (3) функций – часть пределов интегрирования по τ в этих формулах содержит неголоморфные (но дифференцируемые) выражения: $|z_1|$, $|z_2|$, $\arg z_1$, $\arg z_2$.

Стремясь оттенить качественную сторону вопроса и избежать громоздких вычислительных выкладок, мы ограничимся здесь рассмотрением случая $\delta_2 = 0$ в бесконечной области U^{-+} .

Рассмотрим поведение образуемого в этом случае из интеграла (3) интеграла

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{\tau^2}^1 \frac{\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)(\varsigma_2 - z_2)}. \quad (5)$$

Начнем с вывода для интеграла (5) формулы перехода в области U^{-+} от кратного интегрирования к повторному.

Пусть (z_1, z_2) - произвольная точка области U^{-+} . Тогда, в зависимости от значений параметра τ , величина $|u_1|$ может быть как больше, так и меньше единицы, а также равна единице. Например, при $\tau=0$ имеем $|u_1| \equiv |z_1^0| < 1$, а при $\tau=1$ $|u_1| \equiv |z_1| > 1$. Понятно (теорема Больцано-Коши), что в интервале $(0;1)$ должно существовать хотя-бы одно такое значение τ , при котором $|u_1| = 1$. Рассматривая равенство $|u_1| = 1$ как уравнение относительно τ (времененно считаем значение z_1 фиксированным) и учитывая, что

$$|u_1|^2 = u_1 \bar{u}_1 = (\tau^{\delta_1} z_1 + (1 - \tau^{\delta_1}) z_1^0) \left(\tau^{\delta_1} \bar{z}_1 + (1 - \tau^{\delta_1}) \bar{z}_1^0 \right),$$

будем иметь:

$$(\tau^{\delta_1} (z_1 - z_1^0) + z_1^0) \left(\tau^{\delta_1} (\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0) + \bar{z}_1^0 \right) = 1,$$

или, что то же,

$$(z_1 - z_1^0) \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right) (\tau^{\delta_1})^2 + \left((z_1 - z_1^0) \bar{z}_1^0 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0) z_1^0 \right) \tau^{\delta_1} + z_1^0 \bar{z}_1^0 - 1 = 0,$$

откуда

$$(\tau^{\delta_1})^2 + \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\bar{z}_1^0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0} \right) \tau^{\delta_1} + \frac{|z_1^0|^2 - 1}{|z_1 - z_1^0|^2} = 0,$$

или

$$(\tau^{\delta_1})^2 + 2 \left(\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right) \tau^{\delta_1} + \frac{|z_1^0|^2 - 1}{|z_1 - z_1^0|^2} = 0 .$$

Отсюда получаем, что в интервале $(0;1)$ существует **единственное** значение параметра τ :

$$\tau_0 = \left[-\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \sqrt{\left(\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right)^2 + \frac{1 - |z_1^0|^2}{|z_1 - z_1^0|^2}} \right]^{\frac{1}{\delta_1}} , \quad (6)$$

удовлетворяющее уравнению $|u_1| = 1$.

Пусть теперь z_1 имеет произвольное значение, удовлетворяющее условию $|z_1| > 1$. Формула (6) показывает, что в области U^{-+} функция $\tau_0 = \tau_0(z_1)$ является неголоморфной, непрерывной и любое число раз дифференцируемой (в вещественном смысле) функцией.

Введем обозначения:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tau^2} \frac{\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)(\varsigma_2 - z_2)} = \begin{cases} \tilde{\Psi}^{++}(\tau, u_1, z_2), & \text{при } |u_1| < 1, \\ \tilde{\Psi}^{-+}(\tau, u_1, z_2), & \text{при } |u_1| > 1, \end{cases}$$

а при $u_1 = u_1^0 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_0^{\delta_1} z_1 + (1 - \tau_0^{\delta_1}) z_1^0$ будем понимать интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma_1|=1} \frac{\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)}{\varsigma_1 - u_1^0} d\varsigma_1$$

как особый – в смысле главного значения по Коши (его существование гарантирует нам наложенное на плотность $\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)$ условие Гельдера (4)).

Учитывая ограниченность особого интеграла и то обстоятельство, что (при фиксированном z_1 , $|z_1| > 1$) лебегова мера множества $E = \{\tau \in (0;1) : |u_1| = 1\}$ равна нулю, заключаем, что всюду в области U^{-+} интеграл (5) выражается формулой:

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \int_0^{\tau_0} \tilde{\Psi}^{++}(\tau, u_1, z_2) d\tau + \int_{\tau_0}^1 \tilde{\Psi}^{-+}(\tau, u_1, z_2) d\tau , \quad (7)$$

которая будет играть важную роль в исследовании свойств интеграла (5).

З а м е ч а н и е 1. Интеграл (5) можно определить по формуле (7) и в бикруге U^2 , если ввести для τ_0 доопределение (по непрерывности): считать в $\bar{U}^2$ $\tau_0 \equiv 1$.

З а м е ч а н и е 2. Дифференцируемость определяемых формулой (7) функций (это наглядно вытекает из конструкции (7), отмеченного выше характера гладкости функции $\tau_0(z_1)$ и того факта, что функции $\tilde{\Psi}^{++}(\tau, u_1, z_2)$ и $\tilde{\Psi}^{-+}(\tau, u_1, z_2)$ голоморфны по u_1 и z_2) обеспечивает нам правомерность применения к этим функциям метода линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами (см. подробно об этом методе напр. в [3]), чем мы сейчас и займемся.

2. Обобщенные производные интеграла $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$

Вскрытие обобщенных аналитических свойств интеграла (5), которыми он обладает в области U^{-+} , начнем с установления его обобщенной производной по z_1 , т.е. с нахождения такого дифференциального оператора в формальных производных вида:

$$a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + c \frac{\partial}{\partial z_2} + d \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2},$$

где «коэффициенты» a, b, c и d – не известные нам пока еще функции переменных $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$, действие которым на интеграл (5) равносильно дифференцированию по z_1 его ядра.

Учитывая конструкцию формулы (7), в особенности то обстоятельство, что пределы интегрирования в ней – константы 0, 1 и функция $\tau_0 = \tau_0\left(z_1, \bar{z}_1\right)$, заключаем, что два коэффициента в искомом операторе (обозначим его кратко D_{z_1}) следует положить равными нулю: $c \equiv 0, d \equiv 0$.

Далее, принимая во внимание, что в области голоморфности (или при действии на голоморфные выражения) D_{z_1} должен вырождаться в обычную производную, делаем вывод о том, что его следует искать в виде:

$$D_{z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \quad (8)$$

т.е. поставленная задача сводится к нахождению единственного коэффициента $b = b\left(z_1, \bar{z}_1\right)$.

Для определения b будем руководствоваться следующими соображениями, вытекающими из конструкции правой части формулы (7).

Во-первых, внутренние интегралы в ней, после замены параметров ς_1 и ς_2 на вещественные параметры t_1 и t_2 по формулам $\varsigma_1 = e^{it_1}$, $\varsigma_2 = e^{it_2}$, превращаются в интегралы

с постоянными пределами интегрирования и, следовательно, при действии на них оператором D_{z_1} - согласно обобщению правила Лейбница

$$D_{z_1} \left\{ \int_p^q f(z_1, s) ds \right\} = \int_p^q D_{z_1} [f(z_1, s)] ds + D_{z_1}(q) f(z_1, q) - D_{z_1}(p) f(z_1, p)$$

и с учетом свойства $D_{z_1}(const) \equiv 0$ - оператор пройдет за знаки интегралов без образования дополнительных слагаемых. Более того, учитывая голоморфность по z_1 выражения $\frac{1}{\zeta_1 - u_1}$ заключаем, что действие оператором D_{z_1} на подынтегральную функцию равносильно дифференцированию ядра интеграла по z_1 .

Во-вторых, для нахождения b нам теперь достаточно лишь потребовать, чтобы и за знак внешнего интеграла (по τ) в правой части формулы (7) оператор D_{z_1} проходил без образования дополнительных слагаемых. Ясно, что для этого достаточно потребовать выполнимость всего лишь одного тождества:

$$D_{z_1}(\tau_0) \equiv 0. \quad (9)$$

Перейдем к соответствующим выкладкам. Согласно общим свойствам линейных однородных дифференциальных операторов первого порядка с переменными коэффициентами имеем:

$$\begin{aligned} D_{z_1}(\tau_0) &= D_{z_1} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\overline{z_1^0}}{\overline{z_1} - \overline{z_1^0}} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\overline{z_1^0}}{\overline{z_1} - \overline{z_1^0}} \right)^2 + \frac{1 - |z_1^0|^2}{|z_1 - z_1^0|^2}} \right\}^{\frac{1}{\delta_1}} = \\ &= \frac{1}{\delta_1} \{ \dots \}^{\frac{1}{\delta_1} - 1} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z_1^0}{(z_1 - z_1^0)^2} + \frac{\overline{z_1^0} \cdot b}{(\overline{z_1} - \overline{z_1^0})^2} \right) - \frac{1}{2A} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\overline{z_1^0}}{\overline{z_1} - \overline{z_1^0}} \right) \left(\frac{z_1^0}{(z_1 - z_1^0)^2} + \frac{\overline{z_1^0} \cdot b}{(\overline{z_1} - \overline{z_1^0})^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1 - |z_1^0|^2) \left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0} + (z_1 - z_1^0)b \right)}{(z_1 - z_1^0)^2 \cdot (\overline{z_1} - \overline{z_1^0})^2} \right] \right], \end{aligned}$$

где, для сокращения письма, обозначено

$$A = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\bar{z}_1^0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0} \right)^2 + \frac{1 - |z_1^0|^2}{|z_1 - z_1^0|^2}} .$$

Приравнявая полученное выражение нулю и рассматривая образуемое равенство как уравнение относительно b , получаем:

$$A \cdot \left[z_1^0 \cdot \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right)^2 + \bar{z}_1^0 (z_1 - z_1^0)^2 \cdot b \right] - \left(\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right) \left[z_1^0 \cdot \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right)^2 + \bar{z}_1^0 \cdot (z_1 - z_1^0)^2 \cdot b \right] - \\ - \left(1 - |z_1^0|^2 \right) \cdot \left[\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 + (z_1 - z_1^0) \cdot b \right] = 0 ,$$

откуда

$$b = - \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0}{z_1 - z_1^0} \cdot \frac{\left[A - \operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right] \cdot z_1^0 \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right) + |z_1^0|^2 - 1}{\left[A - \operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right] \cdot \bar{z}_1^0 (z_1 - z_1^0) + |z_1^0|^2 - 1} ,$$

или, учитывая, что

$$A - \operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} = \tau_0 ,$$

$$b = - \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0}{z_1 - z_1^0} \cdot \frac{\tau_0 \cdot z_1^0 \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right) + |z_1^0|^2 - 1}{\tau_0 \cdot \bar{z}_1^0 (z_1 - z_1^0) + |z_1^0|^2 - 1}$$

Подставляя найденное для b выражение в (8), получаем явный вид обобщенной производной D_{z_1} интеграла (5):

$$D_{z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0}{z_1 - z_1^0} \cdot \frac{\tau_0 \cdot z_1^0 \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right) + |z_1^0|^2 - 1}{\tau_0 \cdot \bar{z}_1^0 (z_1 - z_1^0) + |z_1^0|^2 - 1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} . \quad (10)$$

Таким образом, в области U^{-+} имеем

$$D_{z_1} [\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{\tau^2} \frac{\tau^{\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)^2 (\varsigma_2 - z_2)} + \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau^2} \frac{\tau^{\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)^2 (\varsigma_2 - z_2)} \quad (11)$$

Учитывая, что в правой части формулы (11) пределы интегрирования остались те же самые, что и в формуле (7), заключаем, что оператор D_{z_1} можно аналогичным образом применить к формуле (11) повторно и, вообще, любое число раз. При этом индукцией по n устанавливается следующая общая формула:

$$D_{z_1}^{(n)}[\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \frac{n!}{(2\pi i)^2} \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{T^2} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)^{n+1} (\varsigma_2 - z_2)} +$$

$$+ \frac{n!}{(2\pi i)^2} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{T^2} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)^{n+1} (\varsigma_2 - z_2)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

(подчеркнем, что в первом слагаемом из правой части формулы (12) $|u_1| < 1$, а во втором $|u_1| > 1$).

Таким образом, оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 3. В области U^{-+} интеграл (5) можно любое число раз «дифференцировать» обобщенной производной D_{z_1} ; эта операция равносильна дифференцированию по z_1 соответствующее число раз ядра интеграла.

В областях голоморфности U^2 , U^{+-} обобщенная производная D_{z_1} вырождается в обычную производную по z_1 и формула (12) принимает вид:

$$(\tilde{F}_1(z_1, z_2))_{z_1}^{(n)} = \frac{n!}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{T^2} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)^{n+1} (\varsigma_2 - z_2)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

З а м е ч а н и е 3. В силу тождества (9) для любых дифференцируемых функций вида $f = f(\tau_0)$ выполняется условие $D_{z_1}(f) \equiv 0$. Такие функции будем называть обобщенными константами оператора D_{z_1} . Отметим, что если f - обобщенная константа, то аналогичным свойством будут обладать $\bar{f}$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ и, вообще, произвольная дифференцируемая функция вида $h = h\left(f, \bar{f}\right)$.

Вопрос о дифференцировании в области U^{-+} интеграла (5) по z_2 решается значительно проще: конструкция правой части формулы (7) показывает, что в области U^{-+} интеграл (5) является голоморфным по переменному z_2 , т.е. операция обычного дифференцирования $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$ по z_2 равносильна дифференцированию по z_2 ядра интеграла. Этот факт можно также сформулировать и следующим образом: в области U^{-+} обобщенная производная D_{z_2} интеграла $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$ совпадает с формальной производной $\frac{\partial}{\partial z_2}$:

$$D_{z_2} = \frac{\partial}{\partial z_2}. \quad (14)$$

С учетом этого, для области U^{-+} получаем общую формулу:

$$D_{z_1}^{(n)} D_{z_2}^{(m)} [\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \frac{n!m!}{(2\pi i)^2} \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{T^2} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)^{n+1} (\varsigma_2 - z_2)^{m+1}} +$$

$$+ \frac{n!m!}{(2\pi i)^2} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{T^2} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)^{n+1} (\varsigma_2 - z_2)^{m+1}}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

3. Разложение интеграла $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$ в обобщенный степенной ряд

Рассмотрим этот вопрос с помощью метода мажорирующей плотности, разработанного ранее автором для случая одного комплексного переменного.

3.1. Пусть плотность $\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)$ удовлетворяет дополнительному условию: при всех $0 \leq \tau \leq 1$ она, как функция переменных ς_1, ς_2 , определена и голоморфна в бикруге

$$U_{1+\varepsilon}^2 = \{(\varsigma_1, \varsigma_2) : |\varsigma_1| < 1 + \varepsilon, |\varsigma_2| < 1 + \varepsilon\},$$

где ε - произвольное, сколь угодно малое положительное число.

Выбрав ε_1 так, чтобы $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, разложим плотность в ряд Тейлора в бикруге $U_{1+\varepsilon_1}^2$:

$$\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}(\tau) \varsigma_1^k \varsigma_2^l, \quad (16)$$

где

$$a_{kl}(\tau) = \frac{1}{k!l!} \left[\frac{\partial^{k+l} \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)}{\partial \varsigma_1^k \partial \varsigma_2^l} \right]_{\substack{\varsigma_1=0 \\ \varsigma_2=0}}.$$

Обозначим:

$$M = \max_{\substack{|\varsigma_1| \leq 1+\varepsilon_1 \\ |\varsigma_2| \leq 1+\varepsilon_1 \\ 0 \leq \tau \leq 1}} |\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)|.$$

В силу неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда имеем:

$$|a_{kl}(\tau)| \leq A_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{(1+\varepsilon_1)^{k+l}}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Отсюда вытекает, что в бикруге $\overline{U^2} = \{(\varsigma_1, \varsigma_2) : |\varsigma_1| \leq 1, |\varsigma_2| \leq 1\}$ ряд (16) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} A_{kl}, \quad (18)$$

и, следовательно, сходится равномерно и абсолютно. Отметим также, что при этом оказывается сходящимся и ряд

$$\sum_{\substack{k=1 \\ l=0}}^{\infty} k A_{kl} . \quad (19)$$

Обратимся к формуле (7). Учитывая, что внутренний интеграл является в рассматриваемом случае интегралом Коши, и, следовательно, $\Psi^{++}(\tau, u_1, z_2) = \varphi(\tau, u_1, z_2)$, $\Psi^{-+}(\tau, u_1, z_2) \equiv 0$, формула (7) может быть переписана в виде

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \int_0^{\tau_0} \varphi(\tau, u_1, z_2) d\tau ,$$

или, с учетом (16),

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \int_0^{\tau_0} \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}(\tau) u_1^k z_2^l \right) d\tau . \quad (20)$$

Отметим, что в правой части формулы (20) можно перейти к почленному интегрированию. Действительно, во-первых, из сходимости ряда (16) в бикруге $\overline{U}^2$ следует равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}(\tau) u_1^k z_2^l \quad (21)$$

(напомним, что в (20) $|u_1| < 1$, $|z_2| < 1$). Во-вторых, интегрирование по τ в пределах от 0 до τ_0 не ухудшает сходимости ряда – это вытекает из оценки произвольного слагаемого

$$P_{kl}^{++} = \int_0^{\tau_0} a_{kl}(\tau) u_1^k z_2^l d\tau :$$

$$|P_{kl}^{++}| \leq \int_0^{\tau_0} |a_{kl}(\tau)| \cdot |u_1|^k \cdot |z_2|^l d\tau < \int_0^{\tau_0} A_{kl} d\tau = A_{kl} \cdot \tau_0 < A_{kl} ,$$

(это означает, что ряд $\sum_{k,l=0}^{\infty} P_{kl}^{++}$ мажорируется тем же числовым рядом (18), что и ряд (16)).

Таким образом, всюду в области U^{-+} интеграл $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся функциональный ряд

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} P_{kl}^{++} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \int_0^{\tau_0} a_{kl}(\tau) u_1^k z_2^l d\tau ,$$

или, что то же,

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \int_0^{\tau_0} a_{kl}(\tau) \cdot [z_1^0 + \tau^{\delta_1}(z_1 - z_1^0)]^k \cdot z_2^l d\tau . \quad (22)$$

Слагаемые P_{kl}^{++} будем называть положительными составляющими интеграла $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$. В бикруге U^2 положительные составляющие обращаются в полиномы, а составленный из них ряд (ряд (22) при значении $\tau_0 \equiv 1$) – в обычный равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд.

3.2. Рассмотрим теперь вопрос о представлении ряда (22) по типу степенного ряда. Заметим, что вид подынтегрального выражения в (22) указывает на то, что удобнее всего этот ряд из интегралов представить в виду разложения $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$ в «степенной» ряд по степеням разности $z_1 - z_1^0$ и z_2 . Преобразуем общий член ряда (22):

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} a_{kl}(\tau) [z_1^0 + \tau^{\delta_1}(z_1 - z_1^0)]^k \cdot z_2^l d\tau &= \int_0^{\tau_0} a_{kl}(\tau) \left[\sum_{\nu=1}^k C_k^{\nu} \cdot (z_1^0)^{k-\nu} \cdot \tau^{\nu\delta_1} \cdot (z_1 - z_1^0)^{\nu} \right] \cdot z_2^l d\tau = \\ &= \sum_{\nu=0}^k \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} (z_1^0)^{k-\nu} \cdot \left(\int_0^{\tau_0} a_{kl}(\tau) \tau^{\nu\delta_1} d\tau \right) \cdot (z_1 - z_1^0)^{\nu} \cdot z_2^l = \\ &= \sum_{\nu=0}^k \frac{k! (z_1^0)^{k-\nu} \cdot (z_1 - z_1^0)^{\nu} \cdot z_2^l}{\nu!(k-\nu)!} \int_0^{\tau_0} \frac{1}{k!l!} \left[\frac{\partial^{k+l} \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)}{\partial \varsigma_1^k \partial \varsigma_2^l} \right]_{\substack{\varsigma_1=0 \\ \varsigma_2=0}} \cdot \tau^{\nu\delta_1} d\tau . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k \frac{(z_1^0)^{k-\nu} \cdot (z_1 - z_1^0)^{\nu} \cdot z_2^l}{\nu!(k-\nu)!l!} \int_0^{\tau_0} \left[\frac{\partial^{k+l} \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)}{\partial \varsigma_1^k \partial \varsigma_2^l} \right]_{\substack{\varsigma_1=0 \\ \varsigma_2=0}} \cdot \tau^{\nu\delta_1} d\tau ,$$

или, обозначая

$$\tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0) = \frac{(z_1^0)^{k-\nu}}{\nu!(k-\nu)!l!} \int_0^{\tau_0} \left[\frac{\partial^{k+l} \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)}{\partial \varsigma_1^k \partial \varsigma_2^l} \right]_{\substack{\varsigma_1=0 \\ \varsigma_2=0}} \cdot \tau^{\nu\delta_1} d\tau ,$$

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k \tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0) (z_1 - z_1^0)^{\nu} \cdot z_2^l . \quad (23)$$

Таким образом, в области U^{++} интеграл $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся о б о б щ е н н ы й с т е п е н н о й р я д (23), который мы будем

называть также обобщенным рядом Тейлора. Отметим, что его «коэффициенты» - функции $\tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0)$ - являются обобщенными константами оператора D_{z_1} : $D_{z_1}[\tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0)] \equiv 0$. В бикруге U^2 они обращаются в обычные контакты:

$$\tilde{b}_{\nu kl}(1) = \frac{(z_1^0)^{k-\nu}}{\nu!(k-\nu)!l!} \int_0^1 \left[\frac{\partial^{k+l} \varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)}{\partial \varsigma_1^k \partial \varsigma_2^l} \right]_{\substack{\varsigma_1=0 \\ \varsigma_2=0}} \cdot \tau^{\nu \delta_1} d\tau.$$

3.3. Обсудим теперь вопрос о «дифференцировании» ряда (23) обобщенной производной D_{z_1} . Применяя оператор D_{z_1} к обеим частям (23) и внося в правой части оператор за знак суммирования (разумеется, до тех пор, пока не будет установлена равномерная сходимость образуемого в итоге ряда, эта операция носит формальный характер), получим:

$$D_{z_1}[\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k D_{z_1}[\tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0) \cdot (z_1 - z_1^0)^{\nu} \cdot z_2^l].$$

Далее, с учетом правила действия линейными дифференциальными операторами на произведение:

$$D_{z_1}[f_1 \cdot f_2] = D_{z_1}(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot D_{z_1}(f_2),$$

имеем

$$\begin{aligned} D_{z_1}[\tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0) \cdot (z_1 - z_1^0)^{\nu} \cdot z_2^l] &= \tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0) \cdot D_{z_1}[(z_1 - z_1^0)^{\nu}] \cdot z_2^l = \tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0) \cdot \frac{\partial (z_1 - z_1^0)^{\nu}}{\partial z_1} z_2^l = \\ &= \nu \cdot \tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0) \cdot (z_1 - z_1^0)^{\nu-1} \cdot z_2^l, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$D_{z_1}[\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^k \sum_{l=0}^{\infty} \nu \cdot \tilde{b}_{\nu kl}(\tau_0) \cdot (z_1 - z_1^0)^{\nu-1} \cdot z_2^l. \quad (24)$$

Покажем равномерную сходимость ряда (24). Обратимся с этой целью к исходному виду ряда (23) – ряду (20). Применяя оператор D_{z_1} к обеим частям (20), получаем:

$$D_{z_1}[\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \int_0^{\tau_0} D_{z_1} \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}(\tau) u_1^k z_2^l \right) d\tau. \quad (25)$$

Вычисляя произвольное слагаемое из первой части (25), будем иметь:

$$\int_0^{\tau_0} D_{z_1} [a_{kl}(\tau) u_1^k z_2^l] d\tau = \int_0^{\tau_0} a_{kl}(\tau) \frac{\partial u_1^k}{\partial z_1} z_2^l d\tau = k \int_0^{\tau_0} a_{kl} \cdot \tau^{\delta_1} \cdot u_1^{k-1} \cdot z_2^l d\tau.$$

Произведем оценку полученного выражения:

$$\begin{aligned} \left| k \int_0^{\tau_0} a_{kl} \cdot \tau^{\delta_1} \cdot u_1^{k-1} \cdot z_2^l d\tau \right| &\leq k \cdot \int_0^{\tau_0} |a_{kl}(\tau)| \cdot \tau^{\delta_1} \cdot |u_1|^{k-1} \cdot |z_2|^l d\tau < k \cdot A_{kl} \cdot \int_0^{\tau_0} \tau^{\delta_1} d\tau = \\ &= \frac{k}{\delta_1 + 1} A_{kl} \tau_0^{\delta_1 + 1} < k \cdot A_{kl}. \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда, в силу сходимости числового ряда (19), ряд (25) и, следовательно, ряд (24) сходятся равномерно и абсолютно.

Итак, установлено, что обобщенный ряд Тейлора (23) можно почленно «дифференцировать» обобщенной производной D_{z_1} , причем, как показывает формула (24), эта операция аналогична правилу дифференцирования по z_1 обычных степенных рядов.

Продолжая применять алгоритм метода мажорирующей плотности, можно показать, что ряд (23) можно аналогичным образом «дифференцировать» обобщенной производной D_{z_1} любое число раз. На этом пути устанавливается справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть плотность интеграла $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$ голоморфна в бикруге $U_{1+\varepsilon}^2$. Тогда в области U^{++} интеграл $\tilde{F}_1(z_1, z_2)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся обобщенный ряд Тейлора (23), который можно любое число раз почленно «дифференцировать» обобщенной производной D_{z_1} аналогично правилу дифференцирования по z_1 обычных степенных рядов:

$$D_{z_1}^{(n)} [\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{v=n}^k v \cdot (v-1) \dots (v-n+1) \cdot \tilde{b}_{vkl}(\tau_0) (z_1 - z_1^0)^{v-n} \cdot z_2^l, \quad n=1, 2, \dots \quad (27)$$

Учитывая, что «коэффициенты» $\tilde{b}_{vkl}(\tau_0)$ от z_2 вообще не зависят, заключаем, что ряды (23) и (27) можно любое число раз дифференцировать по z_2 . В итоге получаем общую формулу:

$$\begin{aligned} D_{z_1}^{(n)} D_{z_2}^{(m)} [\tilde{F}_1(z_1, z_2)] &= \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{v=n}^k v \cdot (v-1) \dots (v-n+1) \cdot l(l-1) \dots (l-m+1) \tilde{b}_{vkl}(\tau_0) (z_1 - z_1^0)^{v-n} \cdot z_2^{l-m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

В бикруге U^2 (в котором, напомним, $\tau_0 \equiv 1$) ряд (23) обращается в обыкновенный двойной степенной ряд, а формула (28) принимает вид обычного правила дифференцирования по z_1 и z_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин И.И. Операторы и обобщенные интегральные формулы Коши, Шварца и Пуассона в случае поликруга // Межвуз. сб. научн. трудов «Математический анализ и теория функций». – М.: Изд. МОПИ. – 1981. – С.3-21.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: «Наука», 1977. – 640 с.
3. Нелаев А.В. Метод линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в исследовании комплексных интегралов в C^n // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов / под ред. Г.Ю.Ризниченко. – М.: Прогресс-Традиция. – 2000. – вып.7. – Часть 2. – С. 444-451.

GENERALIZATION KOSHI'S INTEGRAL TYPE CONNECTED WITH TWICE-CIRCLE

A. Nelayev

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. Generalization Koshi's integral type is considered as connected with twice-circle. Basic attention is given to generalized-analytical properties of such tupe of integrals outside twice-circle.

Keywords: Koshi's integral, twice-circle.

ФИЗИКА