

УДК 533.73

DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69

О ФОРМУЛЕ, ПРИЕМЛЕМОЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПОЛНОГО ИСПАРЕНИЯ КАК МЕЛКИХ, ТАК И КРУПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ ВОДЫ

Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д.

*Московский государственный областной университет
141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24,
Российская Федерация*

Аннотация

Цель. В работе ставится и решается задача получения аналитических формул для вычисления времени испарения мелких и крупных капель сферической формы.

Процедура и методы. В работе использованы аналитические методы математической физики при решении задачи о нестационарном испарении капель. Используются также численные композитные методы для составления общей формулы для всех режимов испарения капель.

Результаты. Получено единое аналитическое выражение, связывающее времена жизни как мелких, так и крупных сферических капель воды. Упомянутые случаи больших и малых капель соответствуют различным асимптотикам. Найдены отдельные формулы для вычисления времени испарения мелких и крупных аэрозольных капель сферической формы. В результате численного анализа этих формул в нестационарном процессе испарения капель воды построена одна более простая формула, приемлемая для вычисления времени жизни как мелких, так и крупных сферических капель воды. Проведено сравнение построенных по этой формуле графиков зависимости времени жизни капли от её начального радиуса при различных значениях температуры среды с результатами, полученными другими авторами.

Теоретическая и/или практическая значимость. Статья представляет большой интерес как для теории нестационарного испарения капель, так и для использования полученных результатов в многочисленных практических приложениях.

Ключевые слова: нестационарный процесс испарения аэрозольных капель, мелкие и крупные капли воды, время полного испарения, учёт кривизны поверхности капли, анализ формул, графиков

ON THE FORMULA ACCEPTABLE FOR CALCULATING THE TIME OF COMPLETE EVAPORATION OF BOTH SMALL AND LARGE SPHERICAL WATER DROPLETS

M. Kuznetsov, M. Kuzmin

Moscow Region State University

ul. Very Voloshinoy 24, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract

Aim. The paper formulates and solves the problem of obtaining analytical formulae for calculating the evaporation time of small and large droplets of spherical shape.

Methodology. The paper relies on analytical methods of mathematical physics in solving the problem of non-stationary evaporation of droplets. Use is also made of numerical composite methods to construct a general formula for all regimes of evaporation of droplets.

Results. A unified analytical expression linking the lifetimes of both small and large spherical water droplets is obtained. The mentioned cases of large and small droplets correspond to different asymptotics. Separate formulae for calculating the evaporation time of small and large spherical aerosol droplets are found. As a result of the numerical analysis of these formulae in the non-stationary process of evaporation of water droplets, a simpler formula acceptable for calculating the lifetime of both small and large spherical water droplets is derived. Formula-built graphs of the dependence of the lifetime of the drop on its initial radius at different values of the ambient temperature are compared with those obtained by other authors.

Research implications. The paper is of great interest both for the theory of non-stationary evaporation of droplets, and for the use of the obtained results in numerous practical applications.

Keywords: non-stationary process of evaporation of aerosol droplets, small and large drops of water, time of complete evaporation, accounting for the curvature of the surface of the droplet, analysis of formulas, graphs

Введение

Теоретические и экспериментальные исследования процесса испарения и конденсационного роста аэрозольных капель имеют давнюю историю [1; 2] и различные аспекты этой тематики продолжают интересовать учёных по сей день [3–12]. В связи с широким применением капельных аэрозолей во многих областях науки и техники часто возникает необходимость оценить время образования или полного испарения такого аэрозоля. Весьма подробный анализ большого числа факторов по-разному, влияющих на скорость протекания процесса испарения единичной капли жидкости, проведён в работе [3], при этом отмечены и недостатки хорошо известной в теории испарения капель формулы Максвелла [1]. Задача максимально полно охватить основные факторы, влияющие на скорость процесса испарения капельных аэрозолей, и

при этом получить наиболее простую и удобную для инженерных расчётов формулу для времени жизни таких капель до сих пор остаётся актуальной.

В предлагаемой статье для получения указанной в её названии формулы будут использованы результаты работы [13]. В ней рассмотрен нестационарный процесс испарения неподвижной аэрозольной капли сферической формы, находящейся в бинарной газовой смеси, первый компонент которой образован молекулами вещества капли, а второй компонент – молекулами несущего газа, то есть парогазовой смеси. При этом имеет место диффузионный режим [1; 2] испарения.

Как известно, к числу важнейших характеристик нестационарного процесса испарения сферических капель относятся: скорость изменения их радиуса, время полного испарения (по-другому – «время высыхания» или «время жизни») капли при учёте существенных факторов, влияющих на процесс. В работе [13], учитывая влияние слоя Кнудсена [1; 2] вокруг капли в виде скачков концентрации и температуры у её поверхности, а также кривизну поверхности, коэффициент поверхностного натяжения, найдены начальное и конечное предельные выражения для скорости изменения радиуса R аэрозольной капли. В обозначениях указанной работы они имеют вид:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0 = \frac{\varepsilon_c T D n m_1 \kappa}{\rho_i g_\chi} (t \rightarrow 0), \quad (1)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty = \frac{\varepsilon_c T D n m_1 \kappa}{\rho_i [g_\chi + R(k_q \sigma + \kappa)]} (t \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Настоящая статья посвящена получению формул для времени полного испарения аэрозольных капель, исходя из соотношений (1) и (2). На основе численного анализа двух полученных формул в применении к нестационарному процессу испарения капель воды в воздушную среду определённой влажности составлена одна формула, приемлемая для вычисления времени жизни как мелких, так и крупных сферических капель воды. Проведено сравнение построенных по этой формуле графиков зависимости времени жизни капли от её начального радиуса с результатами, полученными авторами работы [3].

Формулы для вычисления времени полного испарения сферической аэрозольной капли

Выбор системы координат, относительно которой записаны основные уравнение поставленной в [13] задачи, был определён тем, что процесс испарения протекает сферически симметрично. Такому процессу наилучшим образом подходит сферическая система координат с началом в центре испаряющейся капли.

Из принятых в работе [13] обозначений приведём необходимые для понимания дальнейшего изложения. $c_1(r, t)$, $T(r, t)$ обозначают соответственно распределение относительной концентрации пара и поля

температуры парогазовой смеси вне слоя Кнудсена, где r – радиальная координата сферической системы координат (здесь $r \geq R$), t – время. Приведём для них начальные и граничные условия:

$$c_1(r, t)|_{t=0} = c_1(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = c_{10}, \quad T(r, t)|_{t=0} = T(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = T_0.$$

Далее, $c_{1s}(t) = c_1(T_s)$ – относительная концентрация насыщенных паров вещества капли при температуре её поверхности $T_s(t)$,

$$c_{1s}(t)|_{t=0} = c_{1s0}, \quad T_s(t)|_{t=0} = T_{s0}.$$

Для обозначения относительной концентрации насыщенных паров вещества капли при температуре её поверхности, имеющей пренебрежимо малую кривизну, используем черту над буквой; например, $\bar{c}_{1s}(t)|_{t=0} = \bar{c}_{1s0}$. В выражения (1) и (2) входят $D = nm_2 D_{12} / \rho_e$, где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной (парогазовой) смеси; $n = n_1 + n_2$; n_1, m_1 и n_2, m_2 – концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно; κ – коэффициент теплопроводности парогазовой смеси. ρ_i и ρ_e – соответственно плотности вещества капли и бинарной смеси.

Для описания оставшихся величин $\varepsilon_{cT}, k_{q\sigma}, g_\chi$, входящих в выражения (1) и (2), использованы обозначения: k – постоянная Больцмана, q – удельная теплота испарения вещества капли, σ – коэффициент поверхностного натяжения и χ_c, χ_T – составные коэффициенты скачков концентрации и температуры [14]. Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cT} &= \varepsilon_c - c_{1s0} k_q \varepsilon_T, \quad g_\chi = k_{q\sigma} \chi_T + \kappa \chi_c, \quad k_{q\sigma} = \gamma k_q \bar{c}_{1s0} \left(1 + \frac{k_\sigma}{R}\right), \\ \varepsilon_c &= c_{10} - \bar{c}_{1s0} \left(1 + \frac{k_\sigma}{R}\right), \quad \varepsilon_T = T_0 - T_{s0}, \quad k_q = \frac{q m_1 - k T_{s0}}{k T_{s0}^2}, \\ k_\sigma &= \frac{2 m_1 \sigma}{k T_{s0} \rho_i}, \quad \gamma = D n m_1 q. \end{aligned}$$

Будем рассматривать соотношения (1), (2) как обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых только радиус капли R зависит от времени t . Такое допущение правомерно в предположении, что рассматривается процесс медленного испарения, концентрация молекул пара вещества капли остаётся много меньше концентрации молекул несущей газовой среды и характерное время изменения радиуса капли намного больше отношения квадрата радиуса к коэффициенту диффузии среды. Как отмечено в [3], эти предположения хорошо отражают реальную ситуацию для давлений газа порядка атмосферного.

Итак, в соотношениях (1) и (2) $R = R(t)$ выступает в качестве искомой функции. Разделением переменных R и t уравнения (1) и (2) приводятся к виду:

$$(dt)_0 = -\frac{a_{00}}{b} \left(1 + \frac{a_{01} - c}{R + c}\right) dR, \quad (3)$$

$$(dt)_\infty = -\frac{a_{\infty 0}}{b} \left[R + a_{\infty 1} - c + \frac{a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c)}{R + c}\right] dR, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{00} &= \frac{\kappa \chi_c + \kappa_q \chi_T}{\bar{c}_{qT} - c_{10}}, \quad \kappa_q = \gamma k_q \bar{c}_{1s0}, \quad \bar{c}_{qT} = \bar{c}_{1s0} \left(1 + k_q \varepsilon_T\right); \\ a_{01} &= \frac{\kappa_\sigma \kappa_q \chi_T}{\kappa \chi_c + \kappa_q \chi_T}, \quad b = \frac{D n m_1 \kappa}{\rho_i}, \quad c = \frac{k_\sigma \bar{c}_{qT}}{\bar{c}_{qT} - c_{10}}; \end{aligned}$$

$$a_{\infty 0} = \frac{\kappa + \kappa_q}{c_{qT} - c_{10}}, a_{\infty 1} = \frac{\kappa \chi c + \kappa_q (\chi T + k_\sigma)}{\kappa + \kappa_q}, a_{\infty 2} = \frac{k_\sigma \kappa_q \chi T}{\kappa + \kappa_q}.$$

Проинтегрируем уравнения (3) и (4) при выполнении начального условия

$$R(t)|_{t=0} = R_0.$$

Опуская несложные преобразования, приведём вытекающие из этих уравнений формулы для вычисления времени θ полного испарения аэрозольных капель:

$$\theta_0 = \frac{a_{00}}{b} \left[R_0 + (a_{01} - c) \ln \left| 1 + \frac{R_0}{c} \right| \right], \quad (5)$$

$$\theta_\infty = \frac{a_{\infty 0}}{b} \left\{ \frac{R_0^2}{2} + (a_{\infty 1} - c) R_0 + \left[a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c) \ln \left| 1 + \frac{R_0}{c} \right| \right] \right\}. \quad (6)$$

Заметим, что используемые в обозначении времени полного испарения капли индексы 0 и ∞ указывают не только на то, что их правые части получены из соотношений (3) и (4), снабжённых соответствующими индексами, они указывают и на «малое» и «большое» значения времени полного испарения соответственно «мелких» и «крупных» капель.

Анализ формул для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель

Обратим внимание на то, что выражение (5) и часть выражения (6) состоят из членов, линейно зависящих от R_0 и $\ln \left| 1 + \frac{R_0}{c} \right|$. Выделив эту часть, формулу (6) представим в виде

$$\theta_\infty = t_{\infty 1} + t_{\infty 2}, \quad (7)$$

где

$$t_{\infty 1} = \frac{a_{\infty 0}(a_{\infty 1} - c)}{b} \left[R_0 + \left(\frac{a_{\infty 2}}{a_{\infty 1} - c} - c \right) \ln \left| 1 + \frac{R_0}{c} \right| \right], \quad (8)$$

$$t_{\infty 2} = \frac{a_{\infty 0}}{2b} R_0^2. \quad (9)$$

Формула (5), полученная для малых значений времени, служит для вычисления времени полного испарения более мелких аэрозольных капель. Можно предположить, что имеющая аналогичное с ней строение формула (8) пригодна для той же цели, а слагаемое (9) будет вносить наиболее существенную часть времени полного испарения для более крупных капель.

Если такое предположение верно, то заменив в формуле (7) довольно громоздкое выражение (8) более простым выражением (5), получим более удобную для инженерных расчётов формулу, приемлемую для вычисления времени жизни аэрозольных капель с широким диапазоном начальных радиусов.

Выясним правомерность замены в формуле (7) выражения (8) на более простое выражение (5). Коэффициенты при R_0 и $\ln \left| 1 + \frac{R_0}{c} \right|$ в этих выражениях зависят как от физических свойств вещества испаряющейся капли, так и от условий окружающей ее среды. Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай нестационарного испарения капель воды в воздушную среду 50%

влажности, когда давление этой среды $P = 0,1$ МПа. Для сравнения возьмём два различных значения температуры среды 293 К, 323 К, которым, как известно [13], соответствуют значения коэффициента испарения воды α , равные 0,034 и 0,026.

Поскольку мы рассматриваем процесс только испарения капель, то при $\varepsilon_c < 0$ величина $\varepsilon_{cT} = \varepsilon_c - c_{1s0}k_q\varepsilon_T$, входящая в выражения (1) и (2), должна быть отрицательной, а это возможно только при выполнении условия:

$$\varepsilon_T > -k_q^{-1} \left(1 - \frac{c_{10}}{\varepsilon_c}\right)^{-1}. \quad (10)$$

Откуда получаем [13], что если за основу брать фиксированную температуру среды, то температура поверхности капли не может быть намного выше температуры среды. Для простоты ограничиваемся случаем, когда температура поверхности испаряющейся капли

$$T_s(t) = T_s(t)|_{t=0} = T_{s0} = T_0.$$

В таком случае обеспечивается выполнение условия (10) на все время жизни испаряющейся капли.

Рассматриваемые выражения (5) и (8) включают в себя один и тот же множитель b^{-1} , поэтому для их сравнения достаточно знать численные значения пар величин:

$$a_{00}, a_{\infty 0}(a_{\infty 1} - c), \quad (11)$$

и

$$a_{00}(a_{01} - c), a_{\infty 0}[a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c)]. \quad (12)$$

Вычислив их при двух указанных выше значениях температуры среды, представим для наглядности таблицей.

Таблица 1 / Table 1

Численные значения величин (11) и (12) в зависимости от температуры среды T_0 / Numerical values of quantities (11) and (12) depending on the medium temperature T_0

| T_0 | 293 K | 323 K |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a_{00} | $1,2074 \cdot 10^{-5}$ | $0,5593 \cdot 10^{-5}$ |
| $a_{\infty 0}(a_{\infty 1} - c)$ | $1,2062 \cdot 10^{-5}$ | $0,5587 \cdot 10^{-5}$ |
| $a_{00}(a_{01} - c)$ | $-2,4848 \cdot 10^{-14}$ | $-0,9189 \cdot 10^{-14}$ |
| $a_{\infty 0}[a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c)]$ | $-2,4828 \cdot 10^{-14}$ | $-0,9178 \cdot 10^{-14}$ |

Источник: составлено авторами

Полученные численные значения в табл. 1 показывают, что как выражения (11), так и выражения (12) при обоих значениях температуры среды являются величинами одного порядка, то есть

$$a_{00} \sim a_{\infty 0}(a_{\infty 1} - c), a_{00}(a_{01} - c) \sim a_{\infty 0}[a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c)],$$

причём относительная погрешность при замене одного числа на другое из одной и той же клетки табл. 1 не превышает 0,0012 для всех четырёх пар чисел.

Таким образом, замена в формуле (7) выражения (8) на более простое выражение (5) вполне допустима, в рассматриваемых нами условиях эта процедура не приводит к большим ошибкам. В результате такой замены приходим к следующей формуле для вычисления времени полного испарения капель воды при указанных выше указанных условиях окружающей среды

$$\theta_{0\infty}(R_0) = t_{01}(R_0) + t_{02}(R_0) + t_{\infty 2}(R_0), \quad (13)$$

где

$$t_{01}(R_0) = \frac{a_{00}}{b} R_0, \quad (14)$$

$$t_{02}(R_0) = \frac{a_{00}(a_{01}-c)}{b} \ln \left| 1 + \frac{R_0}{c} \right|, \quad (15)$$

$$t_{\infty 2}(R_0) = \frac{a_{\infty 0}}{2b} R_0^2. \quad (16)$$

Численные значения выражения (13) зависят не только от начального радиуса R_0 испаряющейся капли, но и большого числа учитываемых в рассматриваемом процессе факторов. Легко заметить, что в выражении (13) имеется множитель $b^{-1} = \rho_i (Dnm_1k)^{-1}$. Отметим, что учёт скачков концентрации и температуры вблизи поверхности испаряющейся капли может сказываться лишь на величину выражений (14) и (15), а в выражение (16) коэффициенты скачков концентрации и температуры не входят. Учёт кривизны испаряющейся капли и коэффициента поверхностного натяжения может сказываться только на значения выражения (15).

Для оценки вклада каждого из выражений (14) – (16) на время жизни испаряющейся капли $\theta_{0\infty}(R_0)$ в зависимости от её начального радиуса вычислим их значения для капель воды с начальными радиусами: 10^{-8} м, 10^{-7} м, 10^{-6} м, 10^{-5} м, 10^{-4} м. Выбор таких значений R_0 продиктован тем, чтобы капли воды имели сферическую форму и при этом охватить часто рассматриваемые классы аэрозольных частиц (мелкие частицы, частицы с промежуточными размерами, умеренно крупные частицы, крупные частицы [15]). Полученные при двух различных значениях температуры T_0 окружающей среды 293 К, 323 К численные значения выражений (14) – (16) и (12) представим в табл. 2 и 3.

Таблица 2 / Table 2

Численные значения выражений (14)–(16) и (12) (в секундах) в зависимости от R_0 при температуре окружающей среды $T_0 = 293$ К /

Numerical values of expressions (14)–(16) and (12) (in seconds) depending on R_0 at ambient temperature $T_0 = 293$ K

| R_0 , м | $t_{01}(R_0)$ | $t_{02}(R_0)$ | $t_{\infty 2}(R_0)$ | $\theta_{0\infty}(R_0)$ |
|-----------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 10^{-8} | $2,4479 \cdot 10^{-4}$ | $-0,8702 \cdot 10^{-4}$ | $0,7873 \cdot 10^{-6}$ | $1,5856 \cdot 10^{-4}$ |
| 10^{-7} | $2,4479 \cdot 10^{-3}$ | $-1,9425 \cdot 10^{-4}$ | $0,7873 \cdot 10^{-4}$ | $2,3323 \cdot 10^{-3}$ |

| $R_0, \text{ м}$ | $t_{01}(R_0)$ | $t_{02}(R_0)$ | $t_{\infty 2}(R_0)$ | $\theta_{0\infty}(R_0)$ |
|------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 10^{-6} | $2,4479 \cdot 10^{-2}$ | $-3,0928 \cdot 10^{-4}$ | $0,7873 \cdot 10^{-2}$ | $3,2043 \cdot 10^{-2}$ |
| 10^{-5} | $2,4479 \cdot 10^{-1}$ | $-4,2518 \cdot 10^{-4}$ | 0,7873 | $10,3171 \cdot 10^{-1}$ |
| 10^{-4} | 2,4479 | $-5,4117 \cdot 10^{-4}$ | $0,7873 \cdot 10^2$ | 81,1823 |

Источник: составлено авторами

Таблица 3 / Table 3

Численные значения выражений (14)–(16) и (12) (в секундах) в зависимости от R_0 при температуре окружающей среды $T_0 = 323 \text{ K}$ /

Numerical values of expressions (14)–(16) and (12) (in seconds) depending on R_0 at ambient temperature $T_0 = 323 \text{ K}$

| $R_0, \text{ м}$ | $t_{01}(R_0)$ | $t_{02}(R_0)$ | $t_{\infty 2}(R_0)$ | $\theta_{0\infty}(R_0)$ |
|------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 10^{-8} | $0,8271 \cdot 10^{-4}$ | $-0,2528 \cdot 10^{-4}$ | $0,4234 \cdot 10^{-6}$ | $0,5785 \cdot 10^{-4}$ |
| 10^{-7} | $0,8271 \cdot 10^{-3}$ | $-0,5452 \cdot 10^{-4}$ | $0,4234 \cdot 10^{-4}$ | $0,8149 \cdot 10^{-3}$ |
| 10^{-6} | $0,8271 \cdot 10^{-2}$ | $-0,8559 \cdot 10^{-4}$ | $0,4234 \cdot 10^{-2}$ | $1,2419 \cdot 10^{-2}$ |
| 10^{-5} | $0,8271 \cdot 10^{-1}$ | $-1,1684 \cdot 10^{-4}$ | 0,4234 | $5,0598 \cdot 10^{-1}$ |
| 10^{-4} | 0,8271 | $-1,4814 \cdot 10^{-4}$ | $0,4234 \cdot 10^2$ | 43,1658 |

Источник: составлено авторами

Обратим внимание на то, что выражение (15) принимает только отрицательные значения, а значения выражений (14) и (16) положительны. Следовательно, выражение (15) служит уменьшению времени жизни испаряющейся капли. Это объясняется тем, что появление выражения (15) связано с учётом кривизны поверхности капли, которая приводит к повышению величины давления насыщенных паров у поверхности капли, тем самым увеличивается скорость испарения капли.

Приведённые в табл. 2 и 3 численные значения выражений $t_{01}(R_0)$ и $t_{\infty 2}(R_0)$ для нестационарного процесса испарения сферических капель воды вполне согласуются с выводами, сделанными авторами работы [3] по полученным ими выражению для вычисления времени жизни капли: «в пределе больших капель наблюдается хорошо известная зависимость времени испарения капли от квадрата радиуса, а в пределе малых капель время испарения линейно зависит от начального радиуса» [3, с. 770]. К этому в рассматриваемом нами случае можно добавить, что выражения (14) и (16) при $R_0 \approx 10^{-6} \text{ м}$ являются величинами одного порядка, а для мелких и крупных капель их порядки могут отличаться почти на две единицы.

Численные значения выражения $t_{02}(R_0)$ этих таблиц дают и количественную характеристику вклада на время жизни капли, вызванного с учётом кривизны её поверхности. При $R_0 \geq 10^{-7} \text{ м}$ $|t_{02}(R_0)|$ является величиной меньшего порядка чем $t_{01}(R_0)$, а при $R_0 \geq 10^{-8} \text{ м}$ они окажутся величинами одного порядка. Следовательно, для мелких капель при вычислении времени их полного испарения важен учёт кривизны поверхности таких капель.

Сравнением соответствующих численных значений табл. 2 и 3 нетрудно оценить влияние температуры окружающей среды на время жизни капли. Сравним сначала соответствующие численные значения выражений (14)–(16). Для окружающей среды с более высокой температурой значения $t_{01}(R_0)$ и $t_{\infty 2}(R_0)$ меньше соответствующих значений в 2,96 и 1,86 раза (независимо от значения R_0). Значения выражения $|t_{02}(R_0)|$ не имеют столь определённый характер изменения. Можно лишь сказать, что они возрастают с увеличением размера рассматриваемых капель и повышение температуры окружающей среды приводит к уменьшению соответствующих его значений.

Отмеченные свойства функций $t_{01}(R_0)$, $t_{\infty 2}(R_0)$, $|t_{02}(R_0)|$ недостаточны для установления характера изменения значений функции $\theta_{0\infty}(R_0)$, особенно, если учесть, что $t_{02}(R_0) < 0$. Естественно, что функция $\theta_{0\infty}(R_0)$ убывает на промежутке $[10^{-8} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}]$ и для окружающей среды с более высокой температурой имеет соответствующие меньшие значения.

Интересно отметить, что по полученным в табл. 2 и 3 значениям функции $\theta_{0\infty}(R_0)$ можно обнаружить эффект учёта кривизны поверхности испаряющейся капли. Для этого достаточно изучить характер изменения значений выражения

$$\tau(R_0) = [\theta_{0\infty}(R_0)]_{|T_0=293 \text{ К}} / [\theta_{0\infty}(R_0)]_{|T_0=323 \text{ К}} \quad (17)$$

в зависимости от R_0 . По численным значениям последних столбцов табл. 2 и 3 получаем следующую табл. 4.

Таблица 4 / Table 4

Значения функции (17) (в секундах) в зависимости от начального радиуса R_0 .

Function values (17) (in seconds) depending on the initial radius R_0

| $R_0, \text{ м}$ | 10^{-8} | 10^{-7} | 10^{-6} | 10^{-5} | 10^{-4} |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\tau(R_0)$ | 2,74 | 2,86 | 2,58 | 2,04 | 1,88 |

Источник: составлено авторами

В этой таблице особняком стоит значение, соответствующее начальному радиусу $R_0 = 10^{-8} \text{ м}$, а далее значения $\tau(R_0)$ убывают на промежутке $[10^{-7} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}]$. Причина того, что значение функции $\tau(R_0)$ при $R_0 = 10^{-8} \text{ м}$ оказалось меньше её значения при $R_0 = 10^{-7} \text{ м}$, состоит в относительно особом характере возрастающего влияния значений $t_{02}(R_0)$ на время полного испарения более мелких капель.

Перейдём от численного анализа значений составленной в этой статье функции (13), позволяющей вычислять время жизни капель воды, начальный радиус которых находится в диапазоне от 10^{-8} м до 10^{-4} м , к её графическому изображению. Приведём более развёрнутое выражение этой функции:

$$\theta_{0\infty}(R_0) = b^{-1} \{ a_{00} [R_0 - (c - a_{01}) \ln |1 + c^{-1} R_0|] + 2^{-1} a_{\infty 0} R_0^2 \}. \quad (18)$$

При построении графика функции (18) в целях наглядности используем удобную для изображения полученных численных значений так называемую

«логарифмическую бумагу». На осях прямоугольной системы координат (см. рис. 1) будем откладывать $x = \lg(R_0 \cdot 10^8)$ (ось абсцисс), $y = \lg[\theta_{0\infty}(R_0) \cdot 10^6]$ (ось ординат). На одном и том же рисунке будем строить графики функции (18) при $T_0 = 293 \text{ K}$ и $T_0 = 323 \text{ K}$. Туда же перенесём график зависимости времени полного испарения водяных капель от начального радиуса, построенный авторами статьи [7], когда испарение происходит в среду 50% влажности при температуре 300 K , коэффициент испарения воды α при этом считается равным $0,04$.

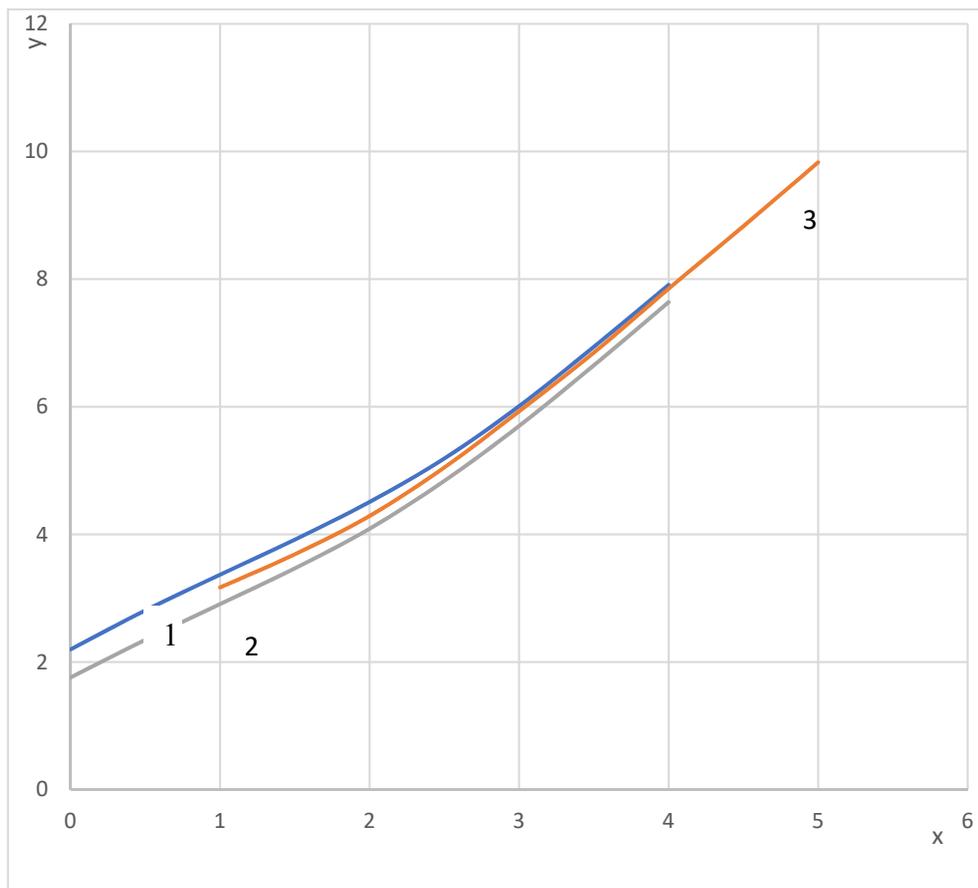


Рис. 1 / Fig. 1. Графики зависимости времени полного испарения капель воды от начального радиуса: 1 – по формуле (18) при $T_0 = 293 \text{ K}$, $\alpha = 0,034$; 2 – по формуле (18) при $T_0 = 323 \text{ K}$, $\alpha = 0,026$; 3 – по формуле, полученной в работе [3] при $T_0 = 300 \text{ K}$, $\alpha = 0,04$ /

Graphs of the dependence of the time of complete evaporation of water drops on the initial radius: 1 - according to formula (18) at $T_0=293 \text{ K}$, $\alpha=0.034$; 2 - according to formula (18) at $T_0=323 \text{ K}$, $\alpha=0.026$; 3 - according to the formula obtained in [3] at $T_0=300 \text{ K}$, $\alpha=0.04$

Источник: составлено авторами

Заключение

Проведённый численный анализ различных выражений при составлении формулы (18) и сходство графиков этой функции с графиком функции, полученной авторами работы [3] для вычисления времени жизни капель, позволяет считать, что предложенная нами формула (18) пригодна для вычисления времени полного испарения неподвижных сферических капель воды, начальные радиусы которых $R_0 \in [10^{-8} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}]$ и температура окружающей среды $T_0 \in [293 \text{ К}, 323 \text{ К}]$.

Статья поступила в редакцию 04.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Издательство АН СССР, 1958. 91 с.
2. Шукин Е. Р., Яламов Ю. И., Шулиманова З. Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: учебное пособие. Москва: Московский педагогический университет, 1992. 297 с.
3. Козырев А. В., Ситников А. Г. Испарение сферической капли в газе среднего давления // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 7. С. 765–774. DOI: 10.3367/UFNr.0171.200107c.0765.
4. Азанов Г. М., Осипцов А. Н. Влияние мелких испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 4. С. 67–76. DOI: 10.7868/S0568528116040034.
5. Прогностическая модель исследования процессов испарения капель воды / Антонов Д. В., Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Пискунов М. В. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 4. С. 936–944.
6. Особенности методики исследования процесса испарения подвешенных капель жидкости / Бочкарева Е. М., Лей М. К., Терехов В. В., Терехов В. И. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 5. С. 2208–2217.
7. Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
8. Герасимов Д. Н., Юрин Е. И. Параметры, определяющие кинетические процессы на поверхности испарения // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 4. С. 530–537. DOI: 10.7868/S0040364415040110.
9. Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Испарение капель воды при движении через высокотемпературные газы // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 1. С. 104–111.
10. Экспериментальное и численное исследования нестационарного испарения капель жидкости / Терехов В. И., Терехов В. В., Шишкин Н. Е., Би К. Ч. // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83. № 5. С. 829–836.
11. Хасанов А. С. Решение задачи об испарении двух капель операторными методами для любых радиусов капель и любых расстояний между ними // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 51–60. DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60.

12. О диффузионном испарении (сублимации) крупной аэрозольной частицы при значительных перепадах температуры в ее окрестности / Щукин Е. Р., Малай Н. В., Шулиманова З. Л., Уварова Л. А. // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 4. С. 561–568. DOI: 10.7868/S004036441503014X.
13. Корнеева Е. Е., Кузьмин М. К. Начальное и конечное предельные выражения для скорости изменения радиуса нестационарно испаряющейся аэрозольной капли // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 4. С. 167–177. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-167-177.
14. Яламов Ю. И., Кузьмин М. К. Скорость нестационарного испарения сферической капли с учетом скачков концентрации и температуры вблизи ее поверхности // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 30–35.
15. Галоян В. С., Яламов Ю. И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.

REFERENCES

1. Fuks N. A. *Isparenie i rost kapel' v gazoobraznoy srede* [Evaporation and growth of drops in a gaseous medium]. Moscow, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1958. 91 p.
2. Shchukin E. R., Yalamov Yu. I., Shulimanova Z. L. *Izbrannye voprosy fiziki aerorozolei* [Selected Issues of Aerosol Physics]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1992. 297 p.
3. Kozyrev A. V., Sitnikov A. G. [Evaporation of a spherical droplet in a moderate-pressure gas]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sciences], 2001, vol. 171, no. 7, pp. 765–774. DOI: 10.3367/UFNr.0171.200107c.0765.
4. Azanov G. M., Osiptsov A. N. [The effect of fine evaporating droplets on the adiabatic-wall temperature in a compressible two-phase boundary layer]. In: *Izvestiya Rossiyskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2016, no. 4, pp. 67–76. DOI: 10.7868/S0568528116040034.
5. Antonov D. V., Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Piskunov M. V. [Prognosis model for investigating the evaporation of water droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 4, pp. 936–944.
6. Bochkareva Ye. M., Lei M. K., Terekhov V. V., Terekhov V. I. [Methodological characteristics of an experimental investigation of the process of evaporation of suspended liquid droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 5, pp. 2208–2217.
7. Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Predictive determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gas media with a varying temperature]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
8. Gerasimov D. N., Yurin E. I. [Parameters determining kinetic processes on an evaporation surface]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2015, vol. 53, no. 4, pp. 530–537. DOI: 10.7868/S0040364415040110.
9. Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Evaporation of water droplets moving through high-temperature gases]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2018, vol. 91, no. 1, pp. 104–111.
10. Terekhov V. I., Terekhov V. V., Shishkin N. E., Bi K. Ch. [Heat and mass transfer in disperse and porous media experimental and numerical investigations of nonstationary

- evaporation of liquid droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2010, vol. 83, no. 5, pp. 829–836.
11. Khasanov A. S. [The solution of the evaporation problem of two drops by operator methods for arbitrary radii of drops and arbitrary distances between them]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 2, pp. 51–60. DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60.
 12. Shchukin E. R., Malay N. V., Shulimanova Z. L., Uvarova L. A. [Diffuse vaporization (sublimation) of a large aerosol particle under precipitous changes in the ambient temperature]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2015, vol. 53, no. 4, pp. 561–568. DOI: 10.7868/S004036441503014X.
 13. Korneeva E. E., Kuz'min M. K. [Initial and finite limit expression for the rate of change in the radius of an unsteady evaporating aerosol droplet]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 4, pp. 167–177. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-167-177.
 14. Yalamov Yu. I., Kuz'min M. K. [Rate of unsteady of a spherical drop with regard to concentration and temperature discontinuities at its surface]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2005, vol. 75, iss. 3, pp. 30–35.
 15. Galoyan V. S., Yalamo Yu. I. *Dinamika kapel' v neodnorodnykh vyazkikh sredakh* [Dynamics of drops in inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luys Publ., 1985. 208 p.
-

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;

e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;

e-mail: m.kuzmin48@yandex.ru.

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;

e-mail: juliaibogdanova@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;

e-mail: Kuznets-omn@yandex.ru;

Mikhail K. Kuzmin – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;

e-mail: m.kuzmin48@yandex.ru.

Yuliya D. Kuleshova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: juliyabogdanova@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д. О формуле, приемлемой для вычисления времени полного испарения как мелких, так и крупных сферических капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 56–69.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuzmin M. K. Kuleshova Y. D. On the formula acceptable for calculating the time of complete evaporation of both small and large spherical water droplets. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 2, pp. 56–69.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.