МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОИСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

Алгазин О. Д., Копаев А. В.

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

Аннотация

Цель: найти точные решения смешанной краевой задачи для системы уравнений Моисила-Теодореску в бесконечном слое.

Процедура и методы. В статье рассмотрены смешанные краевые задачи для системы уравнений Моисила-Теодореску в слое и для системы Коши-Римана в полосе. Эти задачи сводятся к смешанным краевым задачам Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа в слое и в полосе, соответственно, явные решения которых получены авторами ранее с помощью преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста.

Результаты. Получены точные решения смешанных краевых задач для системы Моисила-Теодореску и для системы Коши-Римана, которые записываются в виде свёрток быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых функций (ядер) с граничными функциями, которые считаются обобщёнными функциями медленного роста. Если граничные функции являются обычными функциями медленного роста, то решения записываются интегральными формулами, которые можно считать аналогом формул Келдыша-Седова. В частности, если граничные функции являются полиномами, то решения также являются полиномами.

Теоретическая и/или практическая значимость работы заключается в получении точных решений смешанных краевых задач для системы Моисила-Теодореску и для системы Коши-Римана.

Ключевые слова: Система уравнений Моисила-Теодореску, система уравнений Коши-Римана, краевая задача Римана-Гильберта, краевая задача Шварца, смешанная краевая задача, обобщённые функции медленного роста

SOLUTION OF A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MOISIL–TEODORESKU SYSTEM IN AN INFINITE LAYER

O. Algazin, A. Kopaev

Bauman Moscow State Technical University

ul. 2-ya Baumanskaya 5, stroenie 1, Moscow 105005, Russian Federation

Abstract

Aim. The purpose of the paper is to find exact solutions of a mixed boundary value problem for a system of Moisil–Teodorescu equations in an infinite layer.

Methodology. The paper considers mixed boundary value problems for the Moisil–Teodorescu system of equations in a layer and for the Cauchy–Riemann system in a strip. These problems are reduced to mixed Dirichlet–Neumann boundary value problems for the Laplace equation in a layer and in a strip, respectively, whose explicit solutions were previously obtained by the authors using the Fourier transform of generalized functions of slow growth.

Results. Exact solutions of mixed boundary value problems for the Moisil–Teodorescu system and for the Cauchy–Riemann system are obtained, which are written as convolutions of rapidly decreasing, infinitely differentiable functions (kernels) with boundary functions that are considered to be generalized functions of slow growth. If the boundary functions are ordinary functions of slow growth, then the solutions are written using integral formulas, which can be considered analogous to the Keldysh–Sedov formulas. In particular, if the boundary functions are polynomials, then the solutions are also polynomials.

Research implications. Exact solutions of mixed boundary value problems for the Moisil–Teodorescu system and for the Cauchy–Riemann system are obtained.

Keywords: Moisil–Teodorescu system of equations, Cauchy–Riemann system of equations, Riemann–Hilbert boundary value problem, Schwartz boundary value problem, mixed boundary value problem, generalized functions of slow growth

Введение

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + \frac{\partial q_3}{\partial x_2} + \frac{\partial q_4}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_1} - \frac{\partial q_3}{\partial y} + \frac{\partial q_4}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial y} - \frac{\partial q_4}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где $q_1(x, y)$, $q_2(x, y)$, $q_3(x, y)$, $q_4(x, y)$, $x = (x_1, x_2)$ функции трёх переменных, введена румынскими математиками Г. Моисилом и Н. Теодореску [1] как обобщение на случай трёх переменных системы уравнений Коши–Римана для функций двух переменных $u(x, y)$, $v(x, y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

В случае системы Коши-Римана (2) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими, а функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической (голоморфной).

В случае системы Моисила-Теодореску (1) четырёхкомпонентный вектор $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ называется голоморфным, а его компоненты являются гармоническими функциями трёх переменных.

Теория краевых задач для аналитических функций (для системы Коши-Римана) изложена в книгах [2; 3]. Задачей Гильберта (Римана-Гильберта) называется задача отыскания аналитической функции (решения системы (2)) в области D , если на границе области ∂D задана линейная комбинация функций u и v :

$$au + bv = c$$

или

$$\operatorname{Re}((a - ib)f) = c,$$

где a, b, c – заданные функции.

Частный случай, если $a \equiv 1, b \equiv 0$, называется задачей Шварца.

В случае кусочно-постоянных коэффициентов a и b , если на одной части границы $a = 1, b = 0$, а на оставшейся части границы $a = 0, b = 1$, то есть на одной части границы задана функция u , а на оставшейся части границы задана функция v , мы имеем смешанную краевую задачу [2, с. 472; 3, с. 308]. Для случая полуплоскости решение этой задачи даётся формулой Келдыша-Седова [2–4].

Основные факты теории аналитических функций переносятся на голоморфные векторы [5, с. 222; 6, с. 164]. Например, в [6, с. 179] рассмотрен один из аналогов задачи Римана-Гильберта для полупространства. Другие аналоги задачи Римана-Гильберта для ограниченных областей в $\mathbb{R}^3$ рассмотрены в [7; 8].

В данной работе мы рассматриваем смешанную краевую задачу для системы уравнений Моисила-Теодореску в бесконечном слое

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}^2, 0 < y < a\},$$

в которой требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям:

$$q_1(x, 0) = k(x), q_2(x, a) = l(x), q_3(x, a) = m(x), q_4(x, 0) = n(x).$$

Предварительно мы решаем смешанную краевую задачу для системы уравнений Коши-Римана в полосе.

Полученные интегральные формулы, представляющие решение, можно рассматривать как аналог формул Келдыша-Седова.

1. Смешанная краевая задача для системы Коши-Римана в полосе

Требуется решить краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, a) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3)$$

Эта задача сводится к двум смешанным краевым задачам Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа в полосе для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, a) = -\psi'(x), \quad (5)$$

$$\Delta v(x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad (6)$$

$$v_y(x, 0) = \varphi'(x), \quad v(x, a) = \psi(x). \quad (7)$$

Эти задачи решены в [9]. Их решения записываются в виде свёрток

$$u(x, y) = \varphi(x) * r(x, y) - \psi'(x) * s(x, y), \quad (9)$$

$$v(x, y) = \psi(x) * r(x, a - y) - \varphi'(x) * s(x, a - y), \quad (10)$$

где для ядер введены обозначения ($\mathcal{F}_t^{-1}$ – обратное преобразование Фурье)

$$r(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[R](x, y), \quad R(t, y) = \frac{\text{ch}(t(a - y))}{\text{ch}(ta)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$s(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[S](x, y), \quad S(t, y) = \frac{\text{sh}(ty)}{t \text{ch}(ta)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r(x, y) = \frac{1}{a} \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \text{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}, \quad s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\text{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)} \right).$$

Заданные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно считать обобщёнными функциями медленного роста, $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ [10]. В этом случае решения системы Коши-Римана $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют граничные значения в смысле теории обобщённых функций:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} u(x, y) = \varphi(x) \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{y \rightarrow a-} v(x, y) = \psi(x) \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

то есть для каждой основной функции $\alpha(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеют место равенства:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} (u(x, y), \alpha(x)) = (\varphi(x), \alpha(x)), \quad \lim_{y \rightarrow a-} (v(x, y), \alpha(x)) = (\psi(x), \alpha(x)).$$

Замечание 1. По свойствам свёртки

$$\psi'(x) * s(x, y) = \psi(x) * \frac{\partial}{\partial x} s(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (\psi(x) * s(x, y))$$

$$\varphi'(x) * s(x, a - y) = \varphi(x) * \frac{\partial}{\partial x} s(x, a - y) = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(x) * s(x, a - y)),$$

и формулы (9), (10) можно менять в соответствии с этими равенствами.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – обычные функции медленного роста, то граничные значения функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ существуют в обычном смысле, то есть в каждой точке непрерывности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют место равенства:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} u(x, y) = \varphi(x), \quad \lim_{y \rightarrow a-} v(x, y) = \psi(x).$$

Эти же равенства имеют место в некотором интервале в том случае, когда обобщённая функция $\varphi(x)$ ($\psi(x)$) совпадает в этом интервале с непрерывной функцией.

Когда $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ и $\psi(x)$, $\psi'(x)$ – обычные функции медленного роста, свёртки (9), (10) записываются интегральными формулами:

$$u(x, y) = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(t) \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right) dt,$$

$$v(x, y) = \frac{1}{a} \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t) \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right) dt.$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – полиномы, то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ тоже являются полиномами и явные формулы для них получены в [11].

Решение смешанной краевой задачи (2), (3) единственно в классе функций $f(x, y)$ медленного роста по x :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| (1 + |x|)^{-m} dx < C,$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0, a)$.

Пример 1. $\varphi(x) = H(x)$, $\psi(x) = 0$.

Здесь $H(x)$ – функция Хевисайда, её производная $H'(x) = \delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Решение смешанной задачи (2), (3) получаем по формулам (9), (10):

$$u(x, y) = \varphi(x) * r(x, y) - \psi'(x) * s(x, y) = H(x) * r(x, y) =$$

$$= \frac{1}{a} \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right) + \frac{1}{2}.$$

$$v(x, y) = \psi(x) * r(x, a-y) - \varphi'(x) * s(x, a-y) = -\delta(x) * s(x, a-y) =$$

$$= -s(x, a-y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right).$$

Легко проверить, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют системе Коши-Римана (2) и выполняются граничные условия:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = 1, \text{ если } x > 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = 0, \text{ если } x < 0, \quad \lim_{y \rightarrow a^-} v(x, y) = 0.$$

В точке разрыва функции $H(x)$ $\lim u(0, y) = 1/2$.

Пример 2. $\varphi(x) = \delta(x)$, $\psi(x) \stackrel{y \rightarrow 0^+}{=} 0$.

По формулам (9), (10):

$$u(x, y) = \varphi(x) * r(x, y) - \psi'(x) * s(x, y) = \delta(x) * r(x, y) = r(x, y) = \\ = \frac{1}{a} \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}.$$

$$v(x, y) = \psi(x) * r(x, a - y) - \varphi'(x) * s(x, a - y) = -\delta'(x) * s(x, a - y) = \\ = -\frac{\partial}{\partial x} (\delta(x) * s(x, a - y)) = -\frac{\partial}{\partial x} s(x, a - y) = \\ = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)} \right) \right) = \frac{1}{a} \frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}$$

Легко проверить, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют системе Коши-Римана (2) и выполняются граничные условия в следующем смысле:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = \delta(x) \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

то есть для каждой функции $\alpha(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, имеет место равенство

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} dt = \alpha(0).$$

В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ обобщённая функция $\delta(x)$ совпадает с непрерывной функцией тождественно равной нулю, поэтому

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = 0 \text{ для } x \neq 0.$$

Также

$$\lim_{y \rightarrow a^-} v(x, y) = 0.$$

Пример 3. $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = x^3$.

По формулам, приведённым в [11], получим решение смешанной краевой задачи:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2ay - 3x^2y + y^3 - 3a^2y, \\ v(x, y) = 3a^2x + x^3 - 3xy^2 - 2ax + 2xy.$$

Аналитическая функция, дающая решение задачи Римана-Гильберта:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = iz^3 + z^2 + (3ia^2 - 2ia)z, \\ \operatorname{Re} f(x) = x^2, \quad \operatorname{Im} f(x + ia) = x^3.$$

2. Смешанная краевая задача для системы Моисила-Теодореску в слое

Требуется решить краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + \frac{\partial q_3}{\partial x_2} + \frac{\partial q_4}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_1} - \frac{\partial q_3}{\partial y} + \frac{\partial q_4}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial y} - \frac{\partial q_4}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad (x_1, x_2) = x \in \mathbb{R}^2, 0 < y < a, \quad (11)$$

$$q_1(x, 0) = k(x), q_2(x, a) = l(x), q_3(x, a) = m(x), q_4(x, 0) = n(x) \quad (12)$$

Задача (11), (12) сводится к четырём смешанным краевым задачам Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа в слое:

$$\begin{aligned} \Delta q_1(x, y) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < y < a, \\ q_1(x, 0) &= k(x), \quad \frac{\partial q_1}{\partial y}(x, a) = \frac{\partial l}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial m}{\partial x_1}(x), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Delta q_2(x, y) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < y < a, \\ q_2(x, a) &= l(x), \quad \frac{\partial q_2}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\partial k}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial n}{\partial x_1}(x), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta q_3(x, y) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < y < a, \\ q_3(x, a) &= m(x), \quad \frac{\partial q_3}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial k}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial n}{\partial x_2}(x), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta q_4(x, y) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < y < a, \\ q_4(x, 0) &= n(x), \quad \frac{\partial q_4}{\partial y}(x, a) = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial m}{\partial x_2}(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Эти задачи решены в [9]. Их решения записываются в виде свёрток

$$q_1(x, y) = k(x) * r_2(x, y) + \left(\frac{\partial l}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial m}{\partial x_1}(x) \right) * s_2(x, y), \quad (17)$$

$$q_2(x, y) = l(x) * r_2(x, a - y) + \left(\frac{\partial k}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial n}{\partial x_1}(x) \right) * s_2(x, a - y), \quad (18)$$

$$q_3(x, y) = m(x) * r_2(x, a - y) - \left(\frac{\partial k}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial n}{\partial x_2}(x) \right) * s_2(x, a - y), \quad (19)$$

$$q_4(x, y) = n(x) * r_2(x, y) - \left(\frac{\partial l}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial m}{\partial x_2}(x) \right) * s_2(x, y). \quad (20)$$

где для ядер введены обозначения ($\mathcal{F}_t^{-1}$ – обратное преобразование Фурье)

$$r_2(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[R_2](x, y), \quad R_2(t, y) = \frac{ch(|t|(a - y))}{ch(|t|a)}, \quad t \in \mathbb{R}^2,$$

$$s_2(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[S_2](x, y), \quad S_2(t, y) = \frac{sh(|t|y)}{|t| ch(|t|a)}, \quad t \in \mathbb{R}^2,$$

Ядра $r_2(x, y)$ и $s_2(x, y)$ не выражаются через элементарные функции:

$$r_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ch(\rho(a-y))}{ch(\rho y)} \rho J_0(\rho|x|) d\rho,$$

$$s_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{sh(\rho y)}{ch(\rho y)} J_0(\rho|x|) d\rho,$$

где $J_0(\rho|x|)$ – функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Заданные функции $k(x), l(x), m(x), n(x)$ можно считать обобщёнными функциями медленного роста, $k(x), l(x), m(x), n(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ [10]. В этом случае решения системы Моисила-Теодореску $q_1(x, y), q_2(x, y), q_3(x, y), q_4(x, y)$ имеют граничные значения в смысле теории обобщённых функций.

Замечание 2. Формулы (17), (18), (19), (20) можно изменить в соответствии со свойствами свёртки. Например,

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial m}{\partial x_1}(x) \right) * s_2(x, y) = (l(x) - m(x)) * \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_2}(x, y) - \frac{\partial s_2}{\partial x_1}(x, y) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left((l(x) - m(x)) * s_2(x, y) \right).$$

Если $k(x), l(x), m(x), n(x)$ – обычные функции медленного роста, то граничные значения функций $q_1(x, y), q_2(x, y), q_3(x, y), q_4(x, y)$ существуют в обычном смысле, то есть в каждой точке непрерывности функций $k(x), l(x), m(x), n(x)$ имеют место равенства

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} q_1(x, y) = k(x), \quad \lim_{y \rightarrow a^-} q_2(x, y) = l(x),$$

$$\lim_{y \rightarrow a^-} q_3(x, y) = m(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} q_4(x, y) = n(x).$$

Эти же равенства имеют место в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ и в том случае, когда обобщённые функции $k(x), l(x), m(x), n(x)$ совпадают в этой области с непрерывными функциями.

Если $k(x), l(x), m(x), n(x)$ и их первые производные – обычные функции медленного роста, свёртки (17), (18), (19), (20) записываются интегральными формулами, например:

$$q_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} k(t) dt \int_0^\infty \frac{ch(\rho(a-y))}{ch(\rho y)} \rho J_0(\rho|x-t|) d\rho +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial l}{\partial t_2}(t) - \frac{\partial m}{\partial t_1}(t) \right) dt \int_0^\infty \frac{sh(\rho y)}{ch(\rho y)} J_0(\rho|x-t|) d\rho.$$

Если $k(x), l(x), m(x), n(x)$ – полиномы, то свёртки (17), (18), (19), (20) являются полиномами, и явные формулы для них получены в [11].

Решение смешанной краевой задачи (11), (12) единственно в классе функций $f(x, y)$ медленного роста по x :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| (1 + |x|)^{-m} dx < C, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0, a)$.

Пример 4.

$$k(x) = x_1^2 x_2, \quad l(x) = x_1 x_2^2, \quad m(x) = x_1^2 x_2^2, \quad n(x) = x_1 x_2.$$

По формулам, приведённым в [11], получим решение смешанной краевой задачи:

$$\begin{aligned}
 q_1(x) &= x_1^2 x_2 * r_2(x, y) + (2x_1 x_2 - 2x_1 x_2^2) * s_2(x, y) = \\
 &= x_1^2 x_2 + 2ax_2 y - x_2 y^2 + 2x_1 x_2 y - 2x_1 x_2^2 y + \frac{2}{3} x_1 y^3 - 2a^2 x_1 y. \\
 q_2(x, y) &= x_1 x_2^2 * r_2(x, a - y) + (x_1^2 - x_2) * s_2(x, a - y) = \\
 &= x_1 x_2^2 - x_1 y^2 + x_1 a^2 + x_1^2 a - ax_2 - x_1^2 y + x_2 y + \frac{2}{3} a^3 - ay^2 + \frac{1}{3} y^3. \\
 q_3(x, y) &= x_1^2 x_2^2 * r_2(x, a - y) - (2x_1 x_2 + x_1) * s_2(x, a - y) = \\
 &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 a^2 - x_1^2 y^2 + x_2^2 a^2 - x_2^2 y^2 + \frac{1}{3} y^4 + \frac{5}{3} a^4 - 2a^2 y^2 - 2ax_1 x_2 - \\
 &\quad - ax_1 + 2x_1 x_2 y + x_1 y. \\
 q_4(x, y) &= x_1 x_2 * r_2(x, y) - (x_2^2 + 2x_1^2 x_2) * s_2(x, y) = \\
 &= x_1 x_2 - x_2^2 y - 2x_1^2 x_2 y + \frac{2}{3} x_2 y^3 + \frac{1}{3} y^3 - 2a^2 x_2 y - ya^2.
 \end{aligned}$$

Заключение

Получены точные решения смешанной краевой задачи для системы Моисила-Теодореску в бесконечном слое. В случае, когда заданные на границе слоя функции являются функциями медленного роста, решения задачи записываются интегральными формулами, которые можно считать аналогом формулы Келдыша-Седова для полуплоскости.

Статья поступила в редакцию 07.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moisil G. C., Theodorescu N. Fonctions holomorphes dans l'espace // Buletinul Societății de Științe din Cluj. 1931. Tomul VI. P. 177–194.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
4. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций // Доклады АН СССР. 1937. Т. 16. № 1. С. 7–10.
5. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
6. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204 с.
7. Солдатов А. П. О задаче Шварца для системы Моисила-Теодореску // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 188. С. 3–13. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-3-13.
8. Полковников А. Н., Тарханов Н. Задача Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску // Математические труды. 2018. Т. 21. № 1. С. 155–192. DOI: 10.17377/mat-trudy.2018.21.107.
9. Алгазин О. Д., Кобаев А. В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое // Вестник Московского государственного

технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2015. № 1. С. 3–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13.

10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
11. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 6. С. 1–18. DOI: 10.24108/mathm/0517.0000082.

REFERENCES

1. Moisil G. C., Theodorescu N. Fonctions holomorphes dans l'espace. In: *Buletinul Societății de Științe din Cluj*, 1931, Tomul VI, pp. 177–194.
2. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.
3. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 512 p.
4. Keldysh M. V., Sedov L. I. [Efficient solution of some boundary value problems for harmonic functions]. In: *Doklady AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1937, vol. 16, no. 1, pp. 7–10.
5. Bitsadze A. V. *Osnovy teorii analiticheskikh funktsii kompleksnogo peremennogo* [Fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 320 p.
6. Bitsadze A. V. *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravnenii vtorogo poryadka* [Boundary value problems for second-order elliptic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 204 p.
7. Soldatov A. P. [On the Schwarz problem for the Moisil–Teodoresco system]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Journal of Mathematical Sciences. Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Subject reviews], 2020, vol. 188, pp. 3–13. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-3-13.
8. Polkovnikov A. N., Tarkhanov N. [A Riemann–Hilbert problem for the Moisil–Teodorescu system]. In: *Matematicheskie Trudy* [Siberian Advances in Mathematics], 2018, vol. 21, no. 1, pp. 155–192. DOI: 10.17377/mattrudy.2018.21.107.
9. Algazin O. D., Kopayev A. V. [Solution of the mixed boundary value problem for Laplace equation in a multidimensional infinite layer]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya: Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences], 2015, no. 1, pp. 3–13. DOI 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13.
10. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
11. Algazin O. D. [Polynomial Solutions of the Boundary Value Problems for the Poisson Equation in a Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017, no. 6, pp. 1–18. DOI: 10.24108/mathm/0517.0000082.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);

e-mail: mopi66@yandex.ru

Кобаев Анатолий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);

e-mail: kopaev50@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg D. Algazin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;

e-mail: mopi66@yandex.ru

Anatoliy V. Kopaev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;

e-mail: kopaev50@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д., Кобаев А. В. Решение смешанной краевой задачи для системы Моисила-Теодореску в бесконечном слое // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 6–16.

DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16.

FOR CITATION

Algazin O. D., Kopaev A. V. Solution of a mixed boundary value problem for the Moisl–Teodoresku system in an infinite layer. In: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics, 2022, no. 2, pp. 6–16.

DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16.